Aleatoriedad y anti-aleatoriedad

Santiago Figueira

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Computación

3 de noviembre de 2006

Contenidos

- Aleatoriedad
  - Nociones débiles
    - números normales
    - números absolutamente normales
    - números estocásticos
  - Nociones fuertes
    - paradigma computacional
    - paradigma de teoría de la medida
    - paradigma de impredecibilidad
- Anti-aleatoriedad
  - K-trivialidad y C-trivialidad
  - Nociones de *bajura* (lowness)
  - Equivalencia entre varas nociones

Notación

- Números reales = secuencias = conjuntos de naturales

2^ω = secuencias infinitas de 0s y 1s

$A = 010110101011\ldots$

$[0,1]$ = números reales entre 0 y 1

$A = 0,010110101011\ldots$

conjuntos de $\mathbb{N}$

$A = \{1,3,4,6,8,10,11\ldots\}$

- $2 = \{0,1\}$
- $2^{<\omega}$ = conjunto de todas las cadenas binarias
- $A \upharpoonright n$ = primeros n dígitos de A
- $A(i) \in 2$ es el i-ésimo bit de A. Entonces $A(i) = 1$ sii $i \in A$.
- si σ es una cadena, $|\sigma|$ es la longitud de σ

Números normales

Experimento: tirar una moneda y anotar $0 =$ cara y $1 =$ ceca.

$$0001110110101101010110100111101101\ldots$$

Esperamos que frecuencia de 0s $=$ frecuencia de 1s.

Números normales

Experimento: tirar una moneda y anotar $0 =$ cara y $1 =$ ceca.

$$000111011010110101011010011110110 1\ldots$$

Esperamos que frecuencia de 0s $=$ frecuencia de 1s.

$$0101010101010101010101010101010101\ldots$$

no parece una salida de este experimento. Es porque también esperamos que los bloques de la misma longitud aparezcan con la misma frecuencia. En el ejemplo de arriba, 00 no aparece nunca.

Números normales

Experimento: tirar una moneda y anotar $0 =$ cara y $1 =$ ceca.

$$000111011010110101011010011110110 1 \ldots$$

Esperamos que frecuencia de 0s = frecuencia de 1s.

$$0101010101010101010101010101010101 \ldots$$

no parece una salida de este experimento. Es porque también esperamos que los bloques de la misma longitud aparezcan con la misma frecuencia. En el ejemplo de arriba, 00 no aparece nunca.

Definición (Borel, 1909)

- Un número real A es normal en base t si para todo bloque σ de $\{0, \ldots, t-1\}$,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\#\text{ apariciones de } \sigma \text{ en } A \upharpoonright n}{n} = \frac{1}{t^{|\sigma|}}.$$

Números normales

Experimento: tirar una moneda y anotar $0 =$ cara y $1 =$ ceca.

$$000111011010110101011010011110 1101\ldots$$

Esperamos que frecuencia de 0s $=$ frecuencia de 1s.

$$0101010101010101010101010101010101\ldots$$

no parece una salida de este experimento. Es porque también esperamos que los bloques de la misma longitud aparezcan con la misma frecuencia. En el ejemplo de arriba, 00 no aparece nunca.

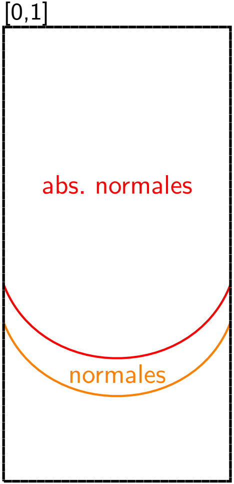
Definición (Borel, 1909)

- Un número real A es normal en base t si para todo bloque σ de $\{0, \ldots, t-1\}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\text{ apariciones de } \sigma \text{ en } A \restriction n}{n} = \frac{1}{t^{|\sigma|}}.$$

- Un número es absolutamente normal cuando es normal en cada base $t = 2, 3, 4, \ldots$

Números absolutamente normales



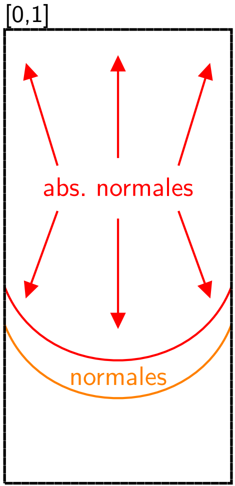
Números absolutamente normales

Teorema (Borel, 1909)

Casi todos los números reales (en el sentido de la medida de Lebesgue) son absolutamente normales:

$$\mu\left(A \in [0,1] \colon A \textit{ es abs. normal}\right) = 1$$

Hay muchos pero es difícil encontrar ejemplos concretos.



Números absolutamente normales

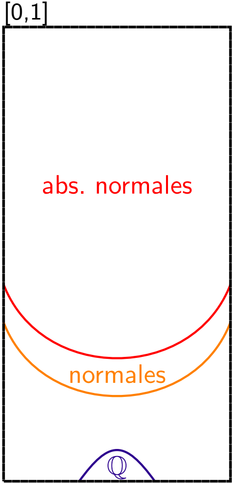
Teorema (Borel, 1909)

Casi todos los números reales (en el sentido de la medida de Lebesgue) son absolutamente normales:

$$\mu\,(A \in [0,1] \colon A \textit{ es abs. normal}) = 1$$

Hay muchos pero es difícil encontrar ejemplos concretos.

- Ningún racional es normal en base t.



Números absolutamente normales

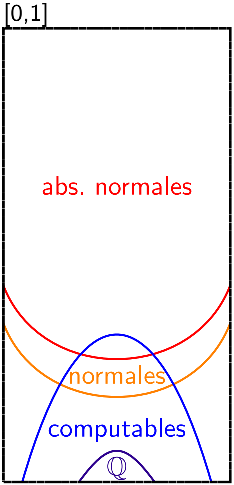
Teorema (Borel, 1909)

Casi todos los números reales (en el sentido de la medida de Lebesgue) son absolutamente normales:

$$\mu\left(A \in [0,1] \colon \textit{A es abs. normal}\right) = 1$$

Hay muchos pero es difícil encontrar ejemplos concretos.

- Ningún racional es normal en base t.
- Se cree que $\sqrt{2}$, π, e son normales en base 10.

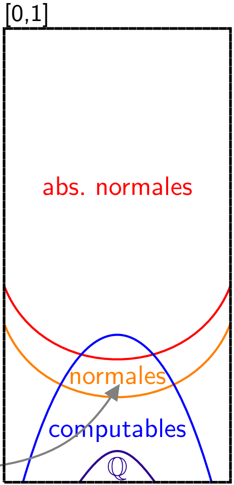


Números absolutamente normales

Teorema (Borel, 1909)

Casi todos los números reales (en el sentido de la medida de Lebesgue) son absolutamente normales:

$$\mu\left(A \in [0,1] \colon A \text{ es abs. normal}\right) = 1$$



Hay muchos pero es difícil encontrar ejemplos concretos.

- Ningún racional es normal en base t.
- Se cree que $\sqrt{2}$, π, e son normales en base 10.
- El número de Champernowne (1933):

  0,12345678910111213...

  es normal en base 10 pero no es abs. normal.

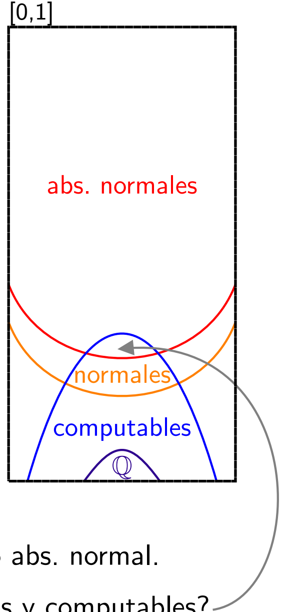
Sierpinski (1917) da el primer ejemplo un número abs. normal.

Números absolutamente normales

Teorema (Borel, 1909)

Casi todos los números reales (en el sentido de la medida de Lebesgue) son absolutamente normales:

$$\mu\left(A \in [0,1] \colon A \text{ es abs. normal}\right) = 1$$



Hay muchos pero es difícil encontrar ejemplos concretos.

- Ningún racional es normal en base t.
- Se cree que $\sqrt{2}$, π, e son normales en base 10.
- El número de Champernowne (1933):

$$0{,}12345678910111213\ldots$$

es normal en base 10 pero no es abs. normal.

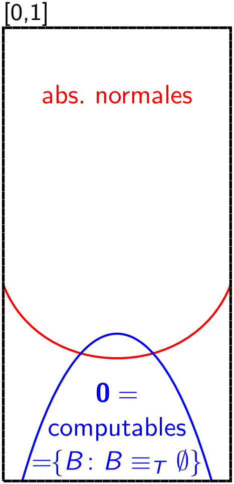
Sierpinski (1917) da el primer ejemplo un número abs. normal.

Pregunta: ¿Hay números absolutamente normales y computables?

Hay números absolutamente normales en todos lados

Teorema

Existen números abs. normales computables.



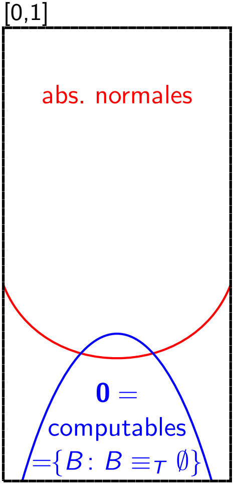
Hay números absolutamente normales en todos lados

Teorema

Existen números abs. normales computables.

Pero el algoritmo para computarlo es muy malo.
Pregunta: ¿Hay números abs. normales en **P**?
Dos enfoques:

- mejorar los algoritmos
- mejorar las técnicas de demostración (tal vez π es absolutamente normal)



Hay números absolutamente normales en todos lados

Teorema

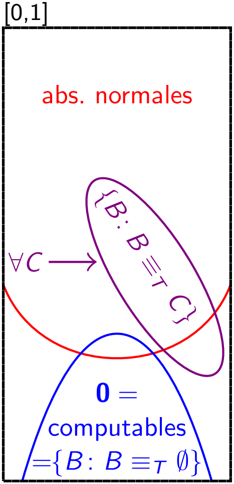
Existen números abs. normales computables.

Pero el algoritmo para computarlo es muy malo.

Pregunta: ¿Hay números abs. normales en $\mathbf{P}$?

Dos enfoques:

- mejorar los algoritmos
- mejorar las técnicas de demostración (tal vez π es absolutamente normal)



Teorema

Hay un real absolutamente normal computable X y un conjunto infinito computable A tal que cualquier real Y que difiere con X sólo en las posiciones de A también es absolutamente normal.

Corolario

Existen números absolutamente normales en todo grado $\mathbf{1}$.

Números estocásticos

El primer intento de definición de aleatoriedad es de von Mises:

Definición (Von Mises, 1919)

Una secuencia es aleatoria cuando el número de ocurrencias de 0s y 1s es la misma y esta propiedad de estabilidad es heredada por cualquier subsecuencia infinita obtenida por una regla de selección "admisible".

Números estocásticos

El primer intento de definición de aleatoriedad es de von Mises:

Definición (Von Mises, 1919)

Una secuencia es aleatoria cuando el número de ocurrencias de 0s y 1s es la misma y esta propiedad de estabilidad es heredada por cualquier subsecuencia infinita obtenida por una regla de selección "admisible".

Definición (Church, 1940)

Llamamos función de selección a una función $f : 2^{<\omega} \to 2$ computable total. f es densa a lo largo de A si $f(A \upharpoonright n) = 1$ para infinitos n. A es estocástico si para cada función de selección f que sea densa sobre A,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|\{k < n : f(A \upharpoonright k) = 1 \wedge k \in A\}\|}{\|\{k < n : f(A \upharpoonright k) = 1\}\|} = 1/2.$$

Paradigma de impredecibilidad

Idea: El conocimiento de los primeros n bits no ayuda para conocer el $n+1$-ésimo.

Definición (Ville, 1939)

- Una martingala es una función $d : 2^{<\omega} \to [0, \infty)$ tal que $d(\lambda) > 0$ y para cada $\sigma \in 2^{<\omega}$
$$d(\sigma) = \frac{d(\sigma 0) + d(\sigma 1)}{2}.$$
- d tiene éxito en A si
$$\limsup_{n\to\infty} d(A \upharpoonright n) = \infty.$$
- d tiene éxito en una clase $\mathbf{C}$ si d tiene éxito en cada $A \in \mathbf{C}$.

La interpretación es:

- juego justo de apuestas en bits sucesivos de una secuencia escondida
- d representa el capital. El apostador empieza con capital $d(\lambda) > 0$.
- en cada vuelta, apuesta $\alpha d(\sigma)$ al 0 y $(1-\alpha)d(\sigma)$ al 1 para $\alpha \in [0, 1]$
- si acierta, duplica; sino pierde. $d(\sigma 0) = 2\alpha d(\sigma)$; $d(\sigma 1) = 2(1-\alpha)d(\sigma)$.

Paradigma de impredecibilidad

Recordemos que μ es la medida de Lebesgue.

Teorema (Ville, 1939)

Para cualquier clase $\mathbf{C}$, $\mu(\mathbf{C}) = 0$ *sii hay una martingala que tiene éxito en* $\mathbf{C}$.

Paradigma de impredecibilidad

Recordemos que μ es la medida de Lebesgue.

Teorema (Ville, 1939)

Para cualquier clase $\mathbf{C}$, $\mu(\mathbf{C}) = 0$ *sii hay una martingala que tiene éxito en* $\mathbf{C}$.

Definición (Schnorr, 1971)

A es recursivamente aleatorio (rec. aleatorio) si ninguna martingala computable tiene éxito en A.

Proposición

Casi todos los números reales son rec. aleatorios.

Impredecibilidad con recursos acotados

Definición

A es $t(n)$-rec. aleatorio si ninguna martingala en **DTIME(t(n))** tiene éxito en A.

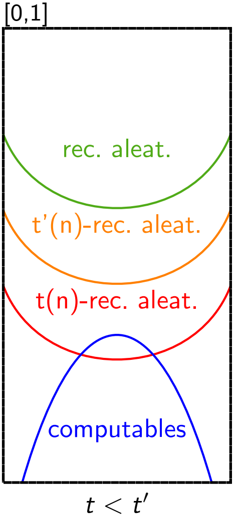
Impredecibilidad con recursos acotados

Definición

A es $t(n)$-rec. aleatorio si ninguna martingala en **DTIME(t(n))** tiene éxito en A.

Pregunta: ¿Existe t tal que si A es $t(n)$-rec. aleatorio entonces es absolutamente normal? Por ejemplo: ¿si A es n^2-rec. aleatorio entonces A será absolutamente normal?

Pregunta: ¿Para qué $t(n)$ vale que hay un $t(n)$-rec. aleatorio en cada grado 1 (m, tt, T)



Paradigma de teoría de la medida

Idea:

- los números aleatorios deben se aquellos que no tengan propiedades "efectivamente" raras
- si una propiedad es un conjunto efectivamente nulo, entonces un número aleatorio no debe tener esa propiedad
- o sino, el paradigma de estocasticidad: un aleatorio debe pasar todos los test estadísticos efectivos

Paradigma de teoría de la medida

Idea:

- los números aleatorios deben se aquellos que no tengan propiedades "efectivamente" raras
- si una propiedad es un conjunto efectivamente nulo, entonces un número aleatorio no debe tener esa propiedad
- o sino, el paradigma de estocasticidad: un aleatorio debe pasar todos los test estadísticos efectivos

Definición (Martin-Löf, 1966)

- un test de Martin-Löf es una secuencia $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de clases Σ_1^0 uniformemente c.e. tal que $\mu(\mathcal{V}_n) \leq 2^{-n}$
- A pasa el test de Martin-Löf $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $A \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n$
- A es Martin-Löf aleatorio (ML aleatorio) si y solo si A pasa todo test de Martin-Löf

Paradigma de teoría de la medida

Teorema

Existe un test universal de Martin-Löf; i.e. existe $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que A es ML aleatorio sii A pasa $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

En otras palabras, los ML aleatorios son $2^\omega \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n$

Proposición

Casi todos los reales son ML aleatorios.

La crítica de Schnorr

Teorema (Schnorr, 1971)

A es ML aleatorio sii ninguna martingala c.e. tiene éxito en A.

Definición

Un martingala d es c.e. si $d(\sigma)$ es un real left-c.e. tal que $d(\sigma) = \text{lím}_s\, d(\sigma)$ y $\lambda\sigma, s.d_s(\sigma) \in \mathbb{Q}$ es una función computable.

La crítica de Schnorr

Teorema (Schnorr, 1971)

A es ML aleatorio sii ninguna martingala c.e. tiene éxito en A.

Definición

Un martingala d es c.e. si $d(\sigma)$ es un real left-c.e. tal que $d(\sigma) = \text{lím}_s\, d(\sigma)$ y $\lambda\sigma, s.d_s(\sigma) \in \mathbb{Q}$ es una función computable.

Según Scnorr

- el teorema muestra una falla en la intuición detrás de la noción de ML aleatoriedad
- la aleatoriedad debe estar relacionada con vencer estrategias computables y no c.e.
- de la misma manera, en la definición de Martin-Löf, los tests $\mathcal{V}_n$ son c.e. pero no computables

Definición (Schnorr, 1971)

Lo mismo que Martin-Löf, pero con $\mu(\mathcal{V}_n) = 2^{-n}$.

Así, los $\mathcal{V}_n$ se vuelven computables (i.e. $\sigma 2^\omega \subseteq \mathcal{V}_n$ es computable).

Teorema

No hay test universal de Schnorr.

Paradigma computacional

Idea: los números aleatorios son algorítmicamente incompresibles

Sea $\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \ldots$ una enumeración de todas las máquinas de Turing libres de prefijos.

Definición

U es una máquina libre de prefijos universal sii

$$(\forall e)(\exists c)(\forall p)(\exists q)\,[\mathbf{U}(q) = \mathbf{T}_e(p) \;\wedge |q| \leq |p| + c].$$

Paradigma computacional

Idea: los números aleatorios son algorítmicamente incompresibles

Sea $\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \ldots$ una enumeración de todas las máquinas de Turing libres de prefijos.

Definición

$\mathbf{U}$ es una máquina libre de prefijos universal sii

$$(\forall e)(\exists c)(\forall p)(\exists q)\,[\mathbf{U}(q) = \mathbf{T}_e(p) \ \wedge |q| \leq |p| + c].$$

Fijamos $\mathbf{U}$ = máquina universal.

Definición (Levin, 1973; Schnorr, 1973; Chaitin, 1975)

$K\colon 2^{<\omega} \to \mathbb{N}$, la complejidad de largo de programa con respecto a la máquina universal $\mathbf{U}$, es $K(\sigma) = \min\{|p| \colon \mathbf{U}(p) = \sigma\}$.

K es una noción de complejidad absoluta.

Definición (Levin, 1974; Gács, 1974, Chaitin, 1975)

A es Levin-Chaitin aleatorio sii $(\exists c)(\forall n)\, K(A \upharpoonright n) > n - c$.

Ejemplo de número aleatorio: probabilidad de detención

Dada una máquina libre de prefijos $\mathbf{M}$,

$$\Omega_{\mathbf{M}} = \sum_{p:\mathbf{M}(p)\downarrow} 2^{-|p|} = \mu\left(\operatorname{dom}\mathbf{M}2^{\omega}\right).$$

es la probabilidad de que **M** se detenga.

Por ejemplo, si $\mathbf{M}(p)\downarrow$ sólo cuando $p = 0^i 1$ con i par, entonces

$$\Omega_{\mathbf{M}} = 0{,}1010101\ldots = 2/3.$$

Ejemplo de número aleatorio: probabilidad de detención

Dada una máquina libre de prefijos $\mathbf{M}$,

$$\Omega_{\mathbf{M}} = \sum_{p:\mathbf{M}(p)\downarrow} 2^{-|p|} = \mu\left(\operatorname{dom}\mathbf{M}2^{\omega}\right).$$

es la probabilidad de que $\mathbf{M}$ se detenga.

Por ejemplo, si $\mathbf{M}(p)\downarrow$ sólo cuando $p = 0^i1$ con i par, entonces

$$\Omega_{\mathbf{M}} = 0{,}1010101\ldots = 2/3.$$

Teorema (Chaitin, 1975)

Para cualquier máquina universal $\mathbf{U}$, $\Omega_{\mathbf{U}}$ *es aleatorio.*

Ejemplo de número aleatorio: probabilidad de detención

Dada una máquina libre de prefijos $\mathbf{M}$,

$$\Omega_{\mathbf{M}} = \sum_{p:\mathbf{M}(p)\downarrow} 2^{-|p|} = \mu\left(\operatorname{dom}\mathbf{M}2^{\omega}\right).$$

es la probabilidad de que **M** se detenga.

Por ejemplo, si $\mathbf{M}(p)\downarrow$ sólo cuando $p = 0^i1$ con i par, entonces

$$\Omega_{\mathbf{M}} = 0{,}1010101\ldots = 2/3.$$

Teorema (Chaitin, 1975)

Para cualquier máquina universal $\mathbf{U}$, $\Omega_{\mathbf{U}}$ *es aleatorio.*

Teorema (Slaman y Kučera, 2001)

Para cualquier A left-c.e. Son equivalentes:

- *A es ML aleatorio*
- *Para todo B left-c.e.* $(\exists c)(\forall n)\ K(B \restriction n) \leq K(A \restriction n) + c$
- *A es la probabilidad de detención de alguna máquina universal*

Martin-Löf aleatorio $\subseteq$ rec. aleatorio $\subseteq$ Schnorr aleatorio

Teorema (Schnorr, 1971)

A es ML aleatorio sii A es Levin-Chaitin aleatorio.

A partir de ahora, los llamo simplemente aleatorios.

Martin-Löf aleatorio $\subseteq$ rec. aleatorio $\subseteq$ Schnorr aleatorio

Teorema (Schnorr, 1971)

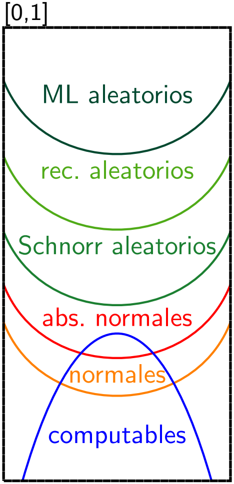
A es ML aleatorio sii A es Levin-Chaitin aleatorio.

A partir de ahora, los llamo simplemente aleatorios.

Teorema (Nies, Stephan y Terwijn, 2005)

Para todo A, son equivalentes:

- *A es alto (high)*
- $\exists B \equiv_T A$ *tal que B es rec. aleatorio pero no ML aleatorio*
- $\exists C \equiv_T A$ *tal que C es Schnorr aleatorio pero no rec. aleatorio*



(Paréntesis: teoría de la computabilidad)

Definición

A es T-reducible a B, (notado $A \leq_T B$) si existe un funcional Ψ tal que $(\forall x)\ \Psi^B(x) = A(x)$.

(Paréntesis: teoría de la computabilidad)

Definición

A es T-reducible a B, (notado $A \leq_T B$) si existe un funcional Ψ tal que $(\forall x)\ \Psi^B(x) = A(x)$.

Definición

El salto de A es

$$A' = \{x : \Phi_x^A(x) \downarrow\}.$$

Por ejemplo, $\emptyset'$ es el problema de la detención (halting problem).

(Paréntesis: teoría de la computabilidad)

Definición

A es T-reducible a B, (notado $A \leq_T B$) si existe un funcional Ψ tal que $(\forall x)\ \Psi^B(x) = A(x)$.

Definición

El salto de A es

$$A' = \{x : \Phi_x^A(x) \downarrow\}.$$

Por ejemplo, $\emptyset'$ es el problema de la detención (halting problem).

- para cualquier A, $\emptyset \leq_T A <_T A'$
- si $A \leq_T B$ entonces $A' \leq_T B'$

(Paréntesis: teoría de la computabilidad)

Definición

A es T-reducible a B, (notado $A \leq_T B$) si existe un funcional Ψ tal que $(\forall x)\ \Psi^B(x) = A(x)$.

Definición

El salto de A es

$$A' = \{x : \Phi_x^A(x) \downarrow\}.$$

Por ejemplo, $\emptyset'$ es el problema de la detención (halting problem).

- para cualquier A, $\emptyset \leq_T A <_T A'$
- si $A \leq_T B$ entonces $A' \leq_T B'$

Si A es c.e. entonces $0 \leq_T A \leq_T \emptyset'$. Luego $\emptyset' \leq_T A' \leq_T \emptyset''$.

Definición

- A es alto (high) si $A' \equiv_T \emptyset''$ (i.e. lo más difícil que puede ser).
- A es bajo (low) si $A' \equiv_T \emptyset'$ (i.e. lo más fácil que puede ser).

Reales anti-aleatorios: K-trivialidad y C-trivialidad

A es aleatorio cuando es algorítmicamente incompresible: la complejidad de $A \upharpoonright n$ es mayor que n.

A es anti-aleatorio cuando A es altamente compresible: la complejidad de $A \upharpoonright n$ es parecida a la complejidad de 0^n.

$$\begin{array}{rcl} A \upharpoonright n & = & A_0\ A_1\ A_2\ \ldots\ A_{n-1} \\ 0^n & = & 0\ \ 0\ \ 0\ \ldots\ \ 0 \end{array}$$

Reales anti-aleatorios: K-trivialidad y C-trivialidad

A es aleatorio cuando es algorítmicamente incompresible: la complejidad de $A \upharpoonright n$ es mayor que n.

A es anti-aleatorio cuando A es altamente compresible: la complejidad de $A \upharpoonright n$ es parecida a la complejidad de 0^n.

$$\begin{array}{rcl} A \upharpoonright n & = & A_0\ A_1\ A_2\ \ldots\ A_{n-1} \\ 0^n & = & 0\ \ 0\ \ 0\ \ \ldots\ \ \ 0 \end{array}$$

Definición (Kolmogorov, 1965; Solomonoff, 1964; Chaitin 1975)

$C : 2^{<\omega} \to \mathbb{N}$ es la complejidad plana (como K pero sin trabajar con máquinas libres de prefijos).

$C < K$ y C no sirve para definir aleatoriedad.

Reales anti-aleatorios: K-trivialidad y C-trivialidad

A es aleatorio cuando es algorítmicamente incompresible: la complejidad de $A \upharpoonright n$ es mayor que n.

A es anti-aleatorio cuando A es altamente compresible: la complejidad de $A \upharpoonright n$ es parecida a la complejidad de 0^n.

$$\begin{array}{rcl} A \upharpoonright n & = & A_0\ A_1\ A_2 \ldots\ A_{n-1} \\ 0^n & = & 0\ \ 0\ \ 0\ \ldots\ \ 0 \end{array}$$

Definición (Kolmogorov, 1965; Solomonoff, 1964; Chaitin 1975)

$C : 2^{<\omega} \to \mathbb{N}$ es la complejidad plana (como K pero sin trabajar con máquinas libres de prefijos).

$C < K$ y C no sirve para definir aleatoriedad.

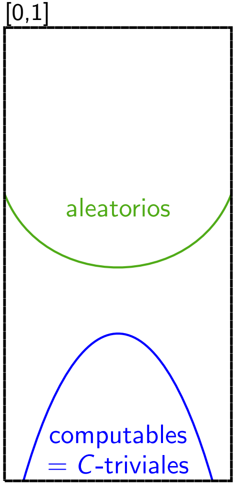
Definición

- Un real A es C-trivial cuando $(\exists c)(\forall n)\ C(A \upharpoonright n) \leq C(0^n) + c$.
- Un real A es K-trivial cuando $(\exists c)(\forall n)\ K(A \upharpoonright n) \leq K(0^n) + c$.

Reales anti-aleatorios: K-trivialidad y C-trivialidad

Teorema (Chaitin, 1976)

A es C-trivial sii A es computable.



Reales anti-aleatorios: K-trivialidad y C-trivialidad

Teorema (Chaitin, 1976)

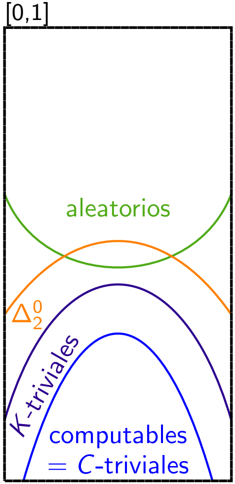
A es C-trivial sii A es computable.

Teorema (Chaitin, 1975)

Si A es K-trivial entonces $A \leq_T \emptyset'$ (i.e. $A \in \Delta_2^0$).

Teorema (Solovay, 1975; Downey et al. 2002)

Existen K-triviales no computables.



Reales anti-aleatorios: K-trivialidad y C-trivialidad

Teorema (Chaitin, 1976)

A es C-trivial sii A es computable.

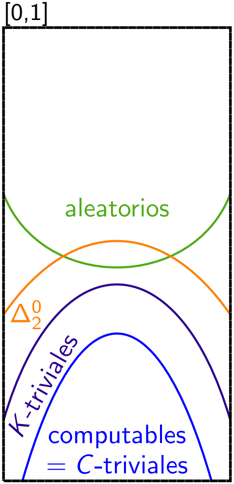
Teorema (Chaitin, 1975)

Si A es K-trivial entonces $A \leq_T \emptyset'$ (i.e. $A \in \Delta^0_2$).

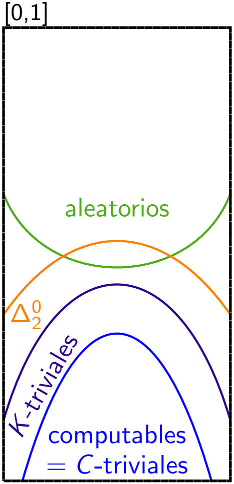
Teorema (Solovay, 1975; Downey et al. 2002)

Existen K-triviales no computables.

Chaitin preguntó: ¿Se pueden caracterizar a los reales computables usando K?



Reales anti-aleatorios: K-trivialidad y C-trivialidad



Teorema (Chaitin, 1976)

A es C-trivial sii A es computable.

Teorema (Chaitin, 1975)

Si A es K-trivial entonces $A \leq_T \emptyset'$ (i.e. $A \in \Delta^0_2$).

Teorema (Solovay, 1975; Downey et al. 2002)

Existen K-triviales no computables.

Chaitin preguntó: ¿Se pueden caracterizar a los reales computables usando K?

Teorema

A es computable sii A es K^∞-trivial.

(K^∞ es una variante de K sobre cómputos infinitos. Es libre de prefijos.)

Nociones de *lowness* y K-trivialidad

Una noción de *bajura (lowness)* de un conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ dice que A es computacionalmente débil cuando se lo usa como oráculo. Por lo tanto A está cerca de ser computable. Algunas son nociones de anti-aleatoriedad.

Nociones de *lowness* y K-trivialidad

Una noción de *bajura (lowness)* de un conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ dice que A es computacionalmente débil cuando se lo usa como oráculo. Por lo tanto A está cerca de ser computable. Algunas son nociones de anti-aleatoriedad.

bajura.

1. f. Falta de elevación.

2. f. ant. **bajeza** (‖ acción indigna).

3. f. ant. **bajeza** (‖ abatimiento, humillación).

□ V.

pesca de bajura

Algunas nociones de bajura

La función de complejidad K y la definición de ML aleatorio se pueden relativizar a oráculos.
Algunos oráculos pueden ser útiles y otros no.

- A es K-trivial: algorítmicamente muy compresible.
  $(\exists c)(\forall n)\ K(A \upharpoonright n) \leq K(0^n) + c$.
- A es bajo para K (low for K): no es útil para reducir K.
  $(\exists c)(\forall \sigma)\ K(\sigma) \leq K^A(\sigma) + c$.
- A es bajo para aleatorios (low for random): no es útil para detectar regularidades.
  Para todo B, si B es aleatorio entonces B es A-aleatorio

Algunas nociones de bajura

La función de complejidad K y la definición de ML aleatorio se pueden relativizar a oráculos.
Algunos oráculos pueden ser útiles y otros no.

- A es K-trivial: algorítmicamente muy compresible.
  $(\exists c)(\forall n)\ K(A \upharpoonright n) \leq K(0^n) + c$.
- A es bajo para K (low for K): no es útil para reducir K.
  $(\exists c)(\forall \sigma)\ K(\sigma) \leq K^A(\sigma) + c$.
- A es bajo para aleatorios (low for random): no es útil para detectar regularidades.
  Para todo B, si B es aleatorio entonces B es A-aleatorio

Teorema (Nies, 2003)

Las tres clases son equivalentes.

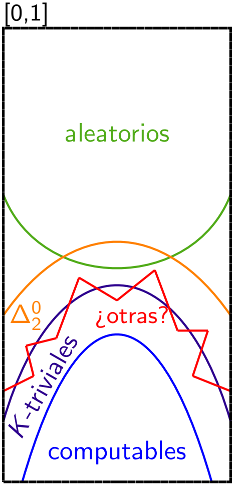
Otras nociones combinatorias de bajura

- Investigamos dos nociones de *lowness* (bajura) combinatorias que no involucran K y provienen de la teoría de la computabilidad.
- Tienen propiedades parecidas a las de K-trivialidad.
- Están relacionadas entre sí y vinculadas con C.

Otras nociones combinatorias de bajura

- Investigamos dos nociones de *lowness* (bajura) combinatorias que no involucran K y provienen de la teoría de la computabilidad.
- Tienen propiedades parecidas a las de K-trivialidad.
- Están relacionadas entre sí y vinculadas con C.

Pregunta ¿Podemos caracterizar a los K-triviales en términos otras nociones combinatorias de bajura provenientes de la teoría de la computabilidad?



Referencias

Teoría algorítmica de la información

Rod G. Downey and Denis R. Hirschfeldt.
Algorithmic randomness and complexity.
In preparation.
http://www.mcs.vuw.ac.nz/~downey/randomness.pdf.

Ming Li and Paul Vitányi.
An introduction to Kolmogorov complexity and its applications.
Springer, 2nd edition, 1997.

Cristian Calude.
Information and Randomness, an Algorithmic Perspective.
Springer-Verlag, Berlin, 1994.

Joseph S. Miller and André Nies.
Randomness and computability: Open questions
Bulletin of Symbolic Logic, 12(3):390-410, 2006.

Referencias

Aleatoriedad

Rod Downey, Denis R. Hirschfeldt, André Nies, and Sebastiaan Terwijn.
Calibrating randomness.
Bulletin of Symbolic Logic, 12(3):411-491, 2006.

Gregory J. Chaitin.
A theory of program size formally identical to information theory.
Journal of the ACM, 22:329–340, 1975.

Klaus Ambos-Spies and Elvira Mayordomo.
Resource Bounded Measure and Randomness.
In *Complexity Logic and Recursion Theory*, pages 1–47, New York NY, 1997.

Referencias

Anti-aleatoriedad

Rod G. Downey, Denis R. Hirschfeldt, André Nies, and Frank Stephan.
Trivial reals.
In *Proceedings of the 7th and 8th Asian Logic Conferences*, pages 103–131. World Scientific, River Edge, NJ, 2003.

André Nies.
Reals which compute little.
Proceedings of Logic Colloquium 2002, Chatizdais, Z, Koepke, P. and Pohlers, W., editors, Lecture Notes in Logic 27:261-275, 2002.

Referencias

Teoría de la computabilidad

Robert I. Soare.
Recursively enumerable sets and degrees.
Springer, Heidelberg, 1987.

Piergiorgio Odifreddi.
Classical recursion theory, volume 1.
North-Holland, Amsterdam, 1999.

¡Vengan a Logic, Computability and Randomness 2007!

Vienen:

- Eric Allender
- Roberto Cignoli
- Noam Greenberg
- Joos Heintz
- Carl Jockusch
- Antonin Kučera
- Steffen Lempp
- Wolfgang Merkle
- Joseph S. Miller
- Jean-Éric Pin
- Jan Reimann
- Claus-Peter Schnorr
- Richard A. Shore
- Theodore Slaman
- Ray Solomonoff
- Ludwig Staiger
- Sebastiaan Terwijn
- Vladimir V'yugin
- Liang Yu

Organizan:

- DC
- Verónica Becher
- Rod Downey
- Denis Hirschfeldt

Más información en www.dc.uba.ar/logic2007