Práctica 4

Lógica Modal Computacional

1er cuatrimestre, 2010

Ejercicio 1. Sea $\mathcal{M}$ un modelo rooted con raíz w, y sea $(\mathcal{M} \upharpoonright k)$ su restricción de altura k, donde k es cualquier número natural. Mostrar que ambos modelos satisfacen en w las mismas fórmulas modales de grado a lo sumo k.

Ejercicio 2. Sea $\mathcal{M}_1$ un modelo con forma de árbol con raíz w y altura k, y sea $\mathcal{M}_2$ el modelo finito que resulta de aplicar el procedimiento de selección visto en clase sobre $\mathcal{M}_1$. Mostrar que $\mathcal{M}_1, w \underline{\leftrightarrow}_k \mathcal{M}_2, w$.

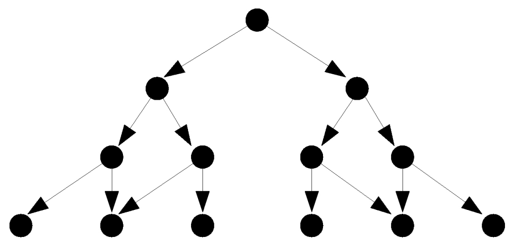
Ejercicio 3. Mostrar que no toda filtración de un modelo transitivo es transitiva.

Ejercicio 4. Demostrar que las filtraciones

- $R^s|w||v|$ sii $\exists w' \in |w|$ y $\exists v' \in |v|$ tal que $Rw'v'$
- $R^l|w||v|$ sii para toda fórmula $\Diamond\varphi$ en Σ: $\mathcal{M}, v \models \varphi$ implica que $\mathcal{M}, w \models \Diamond\varphi$

son efectivamente filtraciones, que R^s es la mínima filtración y que R^l es la máxima.

Ejercicio 5. Sea Γ el conjunto de todas las sentencias (esto es, las fórmulas modales sin símbolos proposicionales). Considerar el siguiente modelo $\mathcal{A}$, con una sola relación de accesibilidad:



en donde todas las transiciones están dibujadas explícitamente (en particular, no hay nodos reflexivos).

a) Determinar la relación de equivalencia $\leftrightsquigarrow_\Gamma$ sobre $\mathcal{A}$.

b) Mostrar que la filtración mínima y máxima de $\mathcal{A}$ sobre Γ son idénticas, y que ambas tienen cuatro elementos.

Ejercicio 6. Sean $\mathcal{N}^+$ y $\mathcal{N}^-$ dos modelos, con una única relación de accesibilidad sobre $\mathbb{N}$, con las siguientes transiciones:

$$a \xrightarrow{+} b \Leftrightarrow b = a + 1 \qquad a \xrightarrow{-} b \Leftrightarrow a = b + 1$$

Sea Γ el conjunto de todas las sentencias.

a) Mostrar que la filtración mínima de $\mathcal{N}^+$ sobre Γ colapsa totalmente el modelo a un punto reflexivo.

b) Mostrar que la filtración máxima de $\mathcal{N}^-$ sobre Γ es un isomorfismo con respecto al modelo original.

Ejercicio 7. Sea $\mathcal{M}$ un modelo, Σ un conjunto cerrado por subfórmulas y W_Σ el conjunto de clases de equivalencia inducido en $\mathcal{M}$ por $\leftrightsquigarrow_\Sigma$. Sea R^t la relación binaria en W_Σ definida como:

$$R^t|w||v| \text{ sii para cada fórmula } \varphi\text{, si } \Diamond\varphi \in \Sigma \text{ y } \mathcal{M}, v \models \varphi \vee \Diamond\varphi \text{ entonces } \mathcal{M}, w \models \Diamond\varphi$$

Mostrar que si R es transitiva, entonces (W_Σ, R^t, V^f) es una filtración, y R^t es transitiva.

Ejercicio 8. Mostrar que la filtración R^s preserva simetría.

Ejercicio 9. Considerar el lenguaje K_T que resulta de agregar el operador $\Diamond^{-1}$ al lenguaje modal básico. Dar una definición apropiada de filtración para K_T. Mostrar a continuación la existencia de filtraciones para K_T, dando las definiciones adecuadas de R^s y R^l (la filtración mínima y máxima respectivamente) y probando que cumplen con las condiciones impuestas por la definición de filtración para K_T.