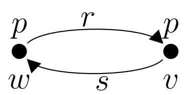
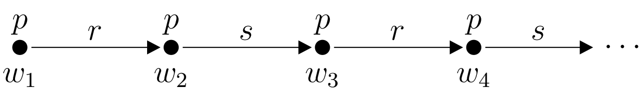
# Práctica 3

Lógica Modal Computacional

1er cuatrimestre, 2010

**Ejercicio 1.** Mostrar que los siguientes modelos (sobre una signatura con dos símbolos de relación $r$ y $s$) son bisimilares




**Ejercicio 2.** Mostrar que la unión de bisimulaciones es una bisimulación.

**Ejercicio 3.** Sea $Z_1$ una bisimulación total entre $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ y sea $Z_2$ una bisimulación total entre $\mathcal{M}_2$ y $\mathcal{M}_3$. Mostrar $Z_1 \circ Z_2$ es una bisimulación total entre $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_3$.

**Ejercicio 4.** Mostrar que una autobisimulación máxima es una relación de equivalencia (i.e., reflexiva, transitiva y simétrica).

**Ejercicio 5.** Sea $\mathcal{M} = \langle W, \{R_i\}, V\rangle$ un modelo y $\mathcal{M}'$ su contracción por bisimulación. Demostrar que:

(I) $\langle \mathcal{M}, w\rangle$ y $\langle \mathcal{M}', [w]\rangle$ son bisimilares para todo $w$

(II) $\mathcal{M}'$ tiene cardinalidad mínima, esto es, ningún modelo que tenga una bisimulación total con $\mathcal{M}$ tiene cardinalidad menor que $\mathcal{M}'$

(*Sugerencia:* Recordar que $A$ tiene mayor cardinalidad que $B$ sii sucede simultáneamente que (i) hay una inyección entre $B$ y algún subconjunto propio de $A$ y (ii) no hay ninguna inyección de $A$ a ningún suconjunto propio de $B$)

**Ejercicio 6.**

(I) Un *homomorfismo* entre dos modelos $\mathcal{M} = \langle W, \{R_i\}, V\rangle$ y $\mathcal{N} = \langle W', \{R'_i\}, V'\rangle$ es una función $f : W \to W'$ tal que

- Para todo $w \in W$ y todo símbolo de proposición $p$, $w \in V(p)$ implica $f(w) \in V'(p)$
- Para todo $w, v \in W$, si $R_i wv$ entonces $R'_i f(w) f(v)$

Mostrar que la verdad de fórmulas modales no es preservada por homomorfismos

(II) Un *homomorfismo fuerte* entre dos modelos $\mathcal{M} = \langle W, \{R_i\}, V\rangle$ y $\mathcal{N} = \langle W', \{R'_i\}, V'\rangle$ es una función $f : W \to W'$ tal que

- Para todo $w \in W$ y todo símbolo de proposición $p$, $w \in V(p)$ sii $f(w) \in V'(p)$
- Para todo $w, v \in W$, $R_iwv$ sii $R'_if(w)f(v)$

Mostrar que la verdad de fórmulas modales tampoco es preservada por homomorfismos fuertes

**Ejercicio 7.** Mostrar que todo modelo es la imagen de algún p-morfismo sobreyectivo que tiene como dominio la unión disjunta de modelos generados a partir de un punto (i.e., rooted models). (*Sugerencia:* No amedrentarse ante lo técnico que parece el enunciado de este ejercicio)

**Ejercicio 8.** Llamemos $K$ a la lógica modal básica, $K_A$ a la lógica modal básica extendida con la modalidad universal $\mathsf{A}$, $K_T$ a la extendida con el el operador de pasado $\langle r\rangle^{-1}$ y $K_D$ a la extensión con el operador de diferencia $D$

(I) Demostrar usando bisimulaciones que no es posible dar una traducción que preserve verdad de fórmulas

(a) de $K_T$ a $K$

(b) de $K_A$ a $K$

(II) Dar una noción de bisimulación para $K_A$, y probar que ninguna fórmula de esta lógica puede distinguir elementos bisimilares

(III) Demostrar usando bisimulaciones que no es posible dar una traducción que preserve verdad de fórmulas de $K_D$ a $K_A$

(IV) Dar una noción de bisimulación y probar que elementos bisimilares no son distinguibles

(a) para $K_T$

(b) para $K_D$

(V) ¿Cuáles de las operaciones de preservación vistas para $K$ también valen en $K_A$, $K_T$ ó $K_D$?

**Ejercicio 9.** Dar una noción adecuada de bisimulación para $\mathcal{HL}(@)$ y mostrar que preserva verdad de fórmulas.

**Ejercicio 10.** La semántica del operador binario *until* $U$ (muy utilizado en verificación de sistemas temporales) sobre un modelo $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$, está dada por la cláusula

$\mathcal{M}, w \models U(\varphi, \psi)$ sii existe un $v$ tal que $Rwv$, $\mathcal{M}, v \models \varphi$ y, para todo $u$ tal que $Rwu$ y $Ruv$, se cumple $\mathcal{M}, u \models \psi$

Mostrar que $U$ no es definible en la lógica modal básica.

*Sugerencia:* Considerar los siguientes dos modelos, en los que la relación de accesibilidad está dada por la clausura transitiva de las relaciones dibujadas: