Práctica 2

Lógica Modal Computacional

1er cuatrimestre, 2010

1. Traducciones

Ejercicio 1.1. Sea ST la traducción estándar vista en clase, que toma fórmulas de la lógica modal básica y devuelve fórmulas de primer orden sin reutilizar variables.

(a) Demostrar que para todo modelo $\mathcal{M}$, todo estado w en $\mathcal{M}$ y toda valuación g se cumple

$$\mathcal{M}, w \models \varphi \text{ sii } \mathcal{M}, g[x \mapsto w] \models ST_x(\varphi)$$

Tener en cuenta que la relación entre modelos de la lógica modal y la lógica de primer orden se da en el lenguaje de correspondencia apropiado.

(b) Demostrar que para toda φ, $ST_x(\varphi)$ es una fórmula donde x y sólo x aparece libre.

Ejercicio 1.2. Extender la traducción estándar ST para la lógica híbrida $\mathcal{HL}(@)$. Es decir, determinar la equivalencia entre modelos de primer orden y modelos híbridos, definir el lenguaje de correspondencia y dar la traducción de las fórmulas para los siguientes casos (con $i \in \text{NOM}$):

(a) i

(b) $@_i\varphi$

A partir de los resultados vistos en clase, ¿qué se puede decir de la decidibilidad de esta lógica?

Ejercicio 1.3. Decidir cuáles de las siguientes propiedades metalógicas de la lógica de primer orden son transferibles a la lógica modal básica utilizando la traducción estándar ST. En caso de ser posible, dar la demostración correspondiente:

(a) *Meta-teorema de la deducción*: Si $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ entonces $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$

(b) *Grafo conexo*: No existe una fórmula φ tal que $\mathcal{M} \models \varphi$ sii $\mathcal{M}$ representa un grafo conexo.

(c) *Modelo infinito*: existe una fórmula φ tal que si $\mathcal{M} \models \varphi$ entonces $\mathcal{M}$ es infinito.

Ejercicio 1.4. (a) Dar una traducción que preserve satisfacibilidad de la lógica modal básica $ML(\Diamond)$ (la lógica con una sola modalidad $\Diamond$) en la que su clase de modelos son los modelos de Kripke transitivos. Esto es, los modelos $\mathcal{M} = \langle M, \{R\}, V\rangle$ en donde R es una relación transitiva. El resultado de traducir una fórmula debe tener el significado apropiado al interpretarlo en lógica de primer orden sobre toda la clase de modelos.

(b) Observando la traducción resultante, ¿se puede aplicar el argumento visto en clase para determinar decidibilidad?

(c) (**para pensar**) Supongamos que tenemos una lógica L decidible. ¿Será cierto que al restringir la clase de modelos de L la lógica resultante es siempre decidible?

Ejercicio 1.5. Dar una traducción que preserve satisfacibilidad de la lógica temporal básica, en la cual las modalidades son F (en algún instante futuro) y P (en algún instante pasado). Recordar que los modelos de la lógica temporal básica son los que tienen una relación de accesibilidad que define un orden lineal estricto. De la misma forma que en el ejercicio anterior, el resultado de traducir una fórmula debe tener el significado apropiado al interpretarlo en lógica de primer orden sobre toda la clase de modelos.

Ejercicio 1.6. Vamos a extender la lógica modal básica con el *operador de diferencia* D. Esto da lugar a la lógica modal $ML(\Diamond, D)$. La semántica de este operador es la siguiente:

$$\mathcal{M}, w \models D\varphi \text{ sii existe } u \neq w \text{ tal que } \mathcal{M}, u \models \varphi$$

(a) Extender la traducción estándar para la lógica $ML(\Diamond, D)$.

(b) Expresar la modalidad universal A en función de D.

(c) Supongamos que tuviéramos un demostrador de primer orden, que dada una fórmula φ nos dice si φ es satisfacible. Por otro lado, contamos con dos traducciones que preservan satisfacibilidad, ST_A (la extensión de ST para la modalidad universal) y ST_D (la extensión de ST pedida en el punto a). ¿Cómo podríamos demostrar automáticamente que el punto (b) es correcto?