Examen final
Lógica Modal Computacional

1er cuatrimestre de 2010

Instrucciones: Cada ejercicio tiene asignado un puntaje de acuerdo a su grado de dificultad. Es necesario obtener 60 puntos para aprobar el exámen (con 6). Exámenes con menos de 60 puntos serán devueltos corregidos como No Aprobado, pero sin nota (y por lo tanto, no se pondrán notas por debajo de 6 en la libreta). Si se obtienen 100 o más puntos la nota del examen es 10.

La entrega es estrictamente individual aunque los ejercicios pueden ser discutidos en grupo. Pero por favor, luego de discutir el ejercicio, cada uno deberá dar una contestación personal al problema.

Aconsejamos explicitar todas las suposiciones, referencias a resultados usados y no detallados, etc. en la solución. Recomendamos también cuidar la presentación y la exposición.

Entrega: El método de entrega es vía e-mail a `dgorin@dc.uba.ar` y `smera@dc.uba.ar`, mediante un archivo PDF conteniendo las respuestas. Confirmaremos la recepción de cada final vía e-mail. La fecha límite de entrega de este trabajo es el **lunes 2 de Agosto**.

1. (**5 Puntos**) Decidir cuáles de las siguientes propiedades metalógicas de la lógica de primer orden son transferibles a la lógica modal básica utilizando la traducción estándar ST. En caso de ser posible, dar la demostración correspondiente, si se cree que no es posible, argumentar por qué:

   a) *Meta-teorema de la deducción*: Si $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ entonces $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$

   b) *Grafo conexo*: No existe una fórmula φ tal que $\mathcal{M} \models \varphi$ sii $\mathcal{M}$ representa un grafo conexo (i.e., existe un camino dirigido entre todo par de puntos).

   c) *Modelo infinito*: existe una fórmula φ tal que si $\mathcal{M} \models \varphi$ entonces $\mathcal{M}$ es infinito.

2. (**5 Puntos**) Dar una noción de bisimulación adecuada para cada una de las siguientes lógicas, y mostrar que la definición dada preserva verdad de fórmulas:

   a) $\mathcal{H}(@)$ (la lógica modal básica extendida con nominales y el operador @)

   b) K_D (la lógica modal básica extendida con el operador de diferencia)

3. (**5 Puntos**) Mostrar usando bisimulaciones que no es posible definir una fórmula φ de la lógica modal básica (sobre un lenguaje con dos modalidades $\langle r \rangle$ y $\langle s \rangle$) que cumpla
$$\mathcal{M}, w \models \varphi \text{ sii } w \text{ tiene más } s\text{-sucesores que } r\text{-sucesores}$$

4. (**15 puntos**) Demostrar que la contracción por bisimulación de $\mathcal{M}$ es un modelo bisimilar a $\mathcal{M}$ de cardinalidad mínima.

5. (**15 Puntos**) Definir una función de selección para demostrar que **S5** (la lógica en cuyos modelos la relación de accesibilidad es una relación de equivalencia) tiene la propiedad del modelo polinomial. ¿Qué se puede decir sobre la complejidad del problema de satisfacibilidad de **S5**?

6. (**10 Puntos**)

   (I) (**5 Puntos**) Dar una noción adecuada de filtración para la lógica híbrida básica $\mathcal{H}(@)$ y mostrar que vale el Filtration Theorem.

   (II) (**5 Puntos**) Dar un filtración que preserve transitividad, simetría y reflexividad.

7. (**15 puntos**) Mostrar que la lógica **K4**, aquella donde la relación de accesibilidad es transitiva, no tiene la propiedad de modelos polinomiales.

8. (**20 puntos**) Demostrar que el problema de satisfacibilidad para la lógica modal **T** (aquella donde la relación de accesibilidad es reflexiva) es PSPACE-completo.

9. (**20 Puntos**)

   (I) (**15 Puntos**) Demostrar que el problema de satisfacibilidad de la siguiente lógica de 'tiling' $\mathbf{Tile}_1$ es indecidible. $\mathbf{Tile}_1$ es una lógica modal con tres diamantes $\langle u \rangle$, $\langle r \rangle$ y $\Diamond$, y cuyos modelos tienen las siguientes propiedades

   - $\langle u \rangle$ y $\langle r \rangle$ son funciones parciales
   - $\forall xyz.((R^r xy \wedge R^u yz) \rightarrow \forall v.(R^u xv \rightarrow R^r vz))$
   - $\Diamond$ es transitiva
   - $\langle u \rangle \subseteq \Diamond$ y $\langle r \rangle \subseteq \Diamond$

   (II) (**5 Puntos**) Usar ahora esta lógica más la traducción estándar para concluir que el fragmento de la lógica de primer orden con sólo tres variables (sin símbolos de función, pero quizas con igualdad) es indecidible.

10. (**15 Puntos**) Sea 1.1 el axioma $\Diamond p \rightarrow \Box p$. Mostrar que **K1.1** es correcta y fuertemente completa respecto de la clase de todos los modelos $\langle W, R, V \rangle$ tal que R es función parcial.