

Lógica modal computacional

Indecidibilidad y modelos infinitos

Daniel Gorín & Sergio Mera



1er cuatrimestre de 2010

Temario de hoy

- Hasta ahora estuvimos viendo cuál era la complejidad de algunas lógicas modales.
- En esta clase vamos a ver algunos ejemplos de lógicas modales *indecidibles*
- Mostraremos algunas técnicas para probar indecidibilidad, y otras propiedades relacionadas.

La lógica $\mathcal{HL}(\downarrow)$

- En la primera clase vimos que se podía pensar en una versión modal de un *binder*, el operador \downarrow
- Este operador nombra el punto actual de evaluación, y permite referirse a él en el resto de la fórmula
- Por ejemplo, $\downarrow x. \diamond x$ caracteriza a los puntos reflexivos de un modelo.

A la signatura que habíamos definido para la lógica modal básica le vamos a agregar un conjunto infinito numerable VAR de variables. Dado entonces una signatura $\langle \text{PROP}, \text{REL}, \text{VAR} \rangle$, la sintaxis de $\mathcal{HL}(\downarrow)$ es:

Sintaxis de $\mathcal{HL}(\downarrow)$

$$\varphi ::= x \mid p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \langle r \rangle \varphi \mid \downarrow x. \varphi$$

donde $p \in \text{PROP}$, $r \in \text{REL}$, $x \in \text{VAR}$.

La lógica $\mathcal{HL}(\downarrow)$

La semántica de esta lógica se define sobre los modelos de Kripke $\mathcal{M} = \langle W, \{R_i\}, V \rangle$ usuales, más una *función de asignación* $g : \text{VAR} \rightarrow W$ que asigna variables a elementos del dominio.

- Dado un modelo $\mathcal{M} = \langle W, \{R_i\}, V \rangle$ y una asignación g , la semántica es:

Semántica de $\mathcal{HL}(\downarrow)$

$(\mathcal{M}, g), w \models p$	sii	$w \in V(p)$
$(\mathcal{M}, g), w \models x$	sii	$g(x) = w$
$(\mathcal{M}, g), w \models \neg\varphi$	sii	$(\mathcal{M}, g), w \not\models \varphi$
$(\mathcal{M}, g), w \models \varphi \wedge \psi$	sii	$(\mathcal{M}, g), w \models \varphi$ y $(\mathcal{M}, g), w \models \psi$
$(\mathcal{M}, g), w \models \langle r_i \rangle \varphi$	sii	existe un w' tal que wR_iw' y $(\mathcal{M}, g), w' \models \varphi$
$(\mathcal{M}, g), w \models \downarrow x. \varphi$	sii	$(\mathcal{M}, g_w^x), w \models \varphi$ donde g_w^x es idéntica a g salvo que $g_w^x(x) = w$.

Modelo infinito

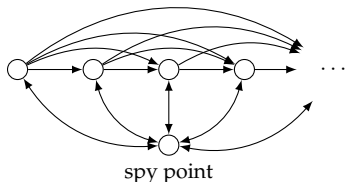
- Ya vimos que la lógica modal básica (y otras extensiones) tienen la propiedad de modelo finito
- Esto nos ayudó a probar la decidibilidad de estas lógicas (sabiendo además una cota para el tamaño del modelo)
- Vamos a ver que $\mathcal{HL}(\downarrow)$ es capaz de *forzar* un modelo infinito
- Esto no prueba por sí mismo indecidibilidad, pero es un indicador en esa dirección

Modelo infinito

- Informalmente, vamos a intentar escribir una fórmula que diga que existe un conjunto no vacío B de elementos que forman un orden parcial estricto. Esto es:
 - Irreflexivo
 - Transitivo
- Y en donde todo elemento tiene un sucesor

Esto implica que B es infinito.

- Ahora, ¿cómo hablamos de un conjunto de puntos con una fórmula modal que se va a evaluar en un *único* punto?
- Vamos a usar una técnica que se conoce como *spy point*



Forzando un modelo infinito

Cada s -sucesor tiene un eje hacia s

$$(Back) \quad \downarrow s. ([r] \neg s \wedge \langle r \rangle \top \wedge [r] \langle r \rangle s)$$

Los s -sucesores en dos pasos son s -sucesores en un paso

$$(Spy) \quad \downarrow s. ([r][r](\neg s \rightarrow (\downarrow x. \langle r \rangle (s \wedge \langle r \rangle x))))$$

La relación sobre los s -sucesores es irreflexiva

$$(Irr) \quad [r] \neg (\downarrow x. \langle r \rangle x)$$

Todos los s -sucesores tienen un sucesor que no es s

$$(Succ) \quad \downarrow s. ([r] \langle r \rangle \neg s)$$

La relación sobre los s -sucesores es transitiva

$$(Tran) \quad \downarrow s. [r] \downarrow x. [r] (\neg s \rightarrow [r] (\neg s \rightarrow \downarrow z. \langle r \rangle (s \wedge \langle r \rangle (x \wedge \langle r \rangle z))))$$

Sea la fórmula $\varphi = Back \wedge Spy \wedge Irr \wedge Succ \wedge Tran$

Forzando un modelo infinito

Teorema

Si $\mathcal{M}, w \models \varphi$ entonces \mathcal{M} es infinito

Demostración. Por construcción de φ .

Es fácil ver que efectivamente hay modelos para φ

Teorema

Existe un modelo \mathcal{M} y un punto $w \in \mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M}, w \models \varphi$.

Demostración. Sea B un conjunto infinito de elementos y s un elemento tal que $s \notin B$. Sea R la mínima relación tal que

- R define un orden parcial estricto sobre B
- wRb y bRw para cada elemento $b \in B$

Luego el modelo $\mathcal{M} = \langle B \cup \{s\}, R, V \rangle$ (para cualquier V) verifica $\mathcal{M}, w \models \varphi$.

Indecidibilidad

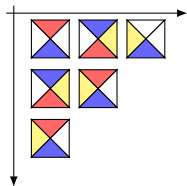
- ¿Cómo mostramos que una lógica es indecidible?
- Si quisieramos mostrarlo de forma directa, deberíamos escribir una fórmula que codifique ejecuciones arbitrarias en una máquina de Turing
- El problema de *tiling*, que ya se demostró indecidible, nos va a ayudar para el caso modal

El problema de tiling

- Dado un conjunto finito de *tipos de tiles* \mathcal{T}



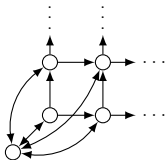
El *problema de tiling*: ¿Es posible colocar tiles de tipo \mathcal{T} en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que cada par de tiles adyacentes tengan el mismo color?



- El problema de tiling en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se sabe indecidible
- Dado un conjunto de tipos de tiles \mathcal{T} , buscamos escribir una fórmula $\varphi_{\mathcal{T}}$ tal que $\varphi_{\mathcal{T}}$ es satisfacible sii hay un tiling para \mathcal{T}

El problema de tiling para $\mathcal{HL}(\downarrow)$

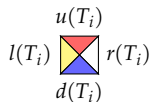
- La idea es intentar codificar este problema con una fórmula de $\mathcal{HL}(\downarrow)$
- Vamos a volver a usar la idea de definir un *spy point*



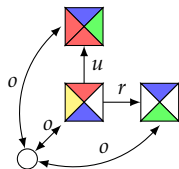
- Notar que, si bien puede parecer lo contrario, codificar el problema de tiling no implica forzar un modelo infinito (ni viceversa)

El problema de tiling para $\mathcal{HL}(\downarrow)$

- Sea $T = \{T_1, \dots, T_n\}$ un conjunto de tipos de tiles
- Dado un tipo de tile T_i , $u(T_i)$, $r(T_i)$, $d(T_i)$, $l(T_i)$ van a representar los colores de T_i correspondientes a los lados arriba, derecha, abajo e izquierda.



- Supongamos también que tenemos una modalidad $\langle o \rangle$ que vamos a usar para movernos desde el spy point a cada tile
- Y modalidades $\langle u \rangle$ y $\langle r \rangle$ para movernos entre tiles hacia arriba y a la derecha respectivamente.



El problema de tiling para $\mathcal{HL}(\downarrow)$

Primero codificamos la grilla:

Cada s -sucesor tiene un único eje hacia s

$$(Back) \quad [o]\neg s \wedge \langle o \rangle \top \wedge [o]\langle o \rangle s \wedge [o][o]s$$

Desde un tile no se llega a s

$$(Empty) \quad [o][\dagger]\neg s \quad \dagger \in \{r, u\}$$

El sucesor de un tile es un s -sucesor

$$(Spy) \quad [o][\dagger](\downarrow x. \langle o \rangle (s \wedge \langle o \rangle x)) \quad \dagger \in \{r, u\}$$

Todo tile tiene un tile arriba y a la derecha

$$(Grid) \quad [o]\langle \dagger \rangle \top \quad \dagger \in \{r, u\}$$

Cada tile tiene un único tile arriba y un único tile a la derecha

$$(Func) \quad [o]\downarrow x.([\dagger]\downarrow y.(\langle o \rangle \langle o \rangle (x \wedge [\dagger]y))) \quad \dagger \in \{r, u\}$$

Hay confluencia entre arriba-derecha y derecha-arriba

$$(Conf) \quad [o]\downarrow x.(\langle u \rangle \langle r \rangle \downarrow y.(\langle o \rangle \langle o \rangle (x \wedge \langle r \rangle \langle u \rangle y)))$$

El problema de tiling para $\mathcal{HL}(\downarrow)$

Y finalmente que en cada punto de la grilla hay un tile y que los colores coinciden:

Cada punto tiene un único tipo de tile

$$(Unique) \quad [o] \left(\bigvee_{1 \leq i \leq n} t_i \wedge \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} (t_i \rightarrow \neg t_j) \right)$$

Cada tile tiene a la derecha un adyacente del color apropiado

$$(Vert) \quad [o] \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \left(t_i \rightarrow \langle u \rangle \bigvee_{1 \leq j \leq n, u(T_i)=d(T_j)} t_j \right)$$

Cada tile tiene a arriba un adyacente del color apropiado

$$(Horiz) \quad [o] \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \left(t_i \rightarrow \langle r \rangle \bigvee_{1 \leq j \leq n, r(T_i)=l(T_j)} t_j \right)$$

Sea

$$\varphi_T = \downarrow s. (Back \wedge Empty \wedge Spy \wedge Grid \wedge Func \wedge Conf \wedge Unique \wedge Vert \wedge Horiz)$$

El problema de tiling para $\mathcal{HL}(\downarrow)$

Teorema

Sea T un conjunto de tipos de tiles. Luego φ_T es satisfacible sii con T se puede armar un tiling en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Demostración:

- (\Rightarrow) Supongamos que $\mathcal{M}, w \models \varphi_T$. Por construcción, \mathcal{M} representa un tiling de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
- (\Leftarrow) Supongamos que $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow T$ es un tiling de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Definimos el modelo $\mathcal{M} = \langle W, \{R_o, R_u, R_r\}, V \rangle$:
- $W = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cup \{w\}$
 - $R_o = \{(w, v), (v, w) \mid v \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$
 - $R_u = \{(x, y), (x, y + 1) \mid x, y \in \mathbb{N}\}$
 - $R_r = \{(x, y), (x + 1, y) \mid x, y \in \mathbb{N}\}$
 - $V(t_i) = \{x \mid x \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, f(x) = T_i\}$

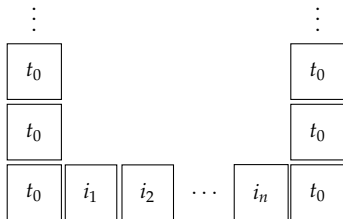
No es difícil ver que $\mathcal{M}, w \models \varphi_T$

Un tiling para cada necesidad

- Codificar el problema de tiling no sólo sirve para probar indecidibilidad
- Variaciones de la definición de este problema también sirven para probar cotas de complejidad y otros grados de indecidibilidad. Por ejemplo:
 - El problema de tiling que acabamos de ver es Π_1^0 -completo
 - Si distinguimos T_1 , un tipo de tile en particular, el problema de tiling de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ donde T_1 ocurre infinitamente seguido en la primera fila del tiling es Σ_1^1 -completo
 - El “two person corridor tiling” es EXPTIME-completo

Two person corridor tiling

- Este tiling tiene 3 jugadores: Spoiler, Duplicator y un réferi.
- Del conjunto finito de tipos de tiles $T = \{t_0, t_1, \dots, t_{s+1}\}$ vamos a distinguir t_0 y t_{s+1}
- Como parámetro de entrada también nos dan un $n \in \mathbb{N}$, que define el ancho del corredor
- El juego comienza con el réferi poniendo tiles de la siguiente manera



Two person corridor tiling

- Las reglas para ir llenando el corredor son estrictas: desde abajo y de izquierda a derecha
- Los jugadores no pueden elegir dónde poner un tile, sólo pueden elegir el tipo del tile
- Las reglas de coincidencia de color son las de siempre (e incluyen los “bordes” del corredor)
- Los jugadores juegan alternativamente, y Spoiler juega primero.
- Cuándo los jugadores ganan o pierden?
 - Si después de finitas jugadas un tile de tipo t_{s+1} es puesto en la primera columna, Spoiler gana
 - En otro caso (si alguno de los jugadores no puede hacer ningún movimiento válido, t_{s+1} no está en la columna 1, o el juego se prolonga infinitamente) gana Duplicator
- El problema de determinar si Spoiler tiene una estrategia ganadora se sabe EXPTIME-completo.

Two person corridor tiling

- Usando el “two person corridor tiling” se puede demostrar que PDL es EXPTIME-hard, codificando el árbol de posibles jugadas entre Spoiler y Duplicator.
- También se puede usar para demostrar que $K + A$ es EXPTIME-hard.