Lógica Modal Computacional

Usos de Bisimulaciones

Daniel Gorín & Sergio Mera

1er Cuatrimestre 2010,
Buenos Aires, Argentina

Temario

- Propiedad de *tree model*.
- n-bisimulación.
- Propiedad de modelo finito vía selección.
- Propiedad de modelo finito vía filtraciones.

Bibliografía

- Capítulo 2 y apéndice A del Modal Logic Book (Blackburn, Venema & de Rijke)

Tree model property

- Vamos a ver una aplicación de las operaciones entre modelos que preservan satisfacibilidad.
- Usando la operación de submodelos generados, es posible demostrar que cualquier fórmula satisfacible es satisfecha en un modelo con forma de árbol.
- Esta propiedad se conoce como la *tree model property*.

Tree model property

Recordemos primero algunas definiciones:

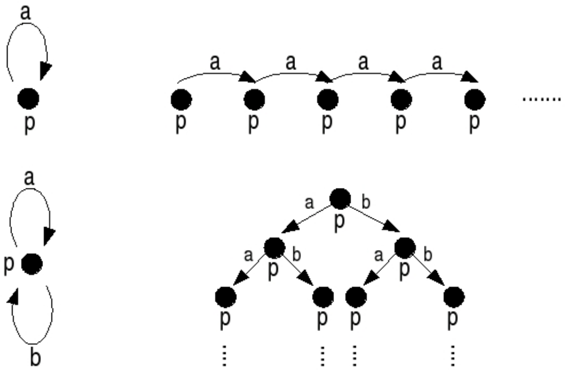
- Dados dos modelos $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}'$, y $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ un morfismo acotado, para toda fórmula φ y para todo $w \in \mathcal{M}$ se cumple que $\mathcal{M}, w \models \varphi$ sii $\mathcal{M}', f(w) \models \varphi$.
- Si hay un morfismo acotado *suryectivo* entre ambos modelos, se nota $\mathcal{M} \twoheadrightarrow \mathcal{M}'$.
- Un modelo *rooted* o *point generated* es un modelo generado por un conjunto singleton $\{w\}$ (a w se lo llama la *raíz* del modelo).

Más formalmente entonces:

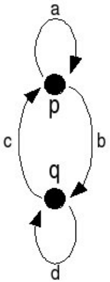
- *Tree model property*: Para cualquier modelo $\mathcal{M}$ existe un modelo $\mathcal{M}'$ con forma de árbol tal que $\mathcal{M}' \twoheadrightarrow \mathcal{M}$. Por lo tanto, cualquier fórmula satisfacible es satisfecha en un modelo con forma de árbol.

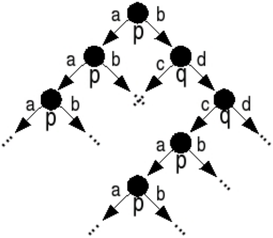
Tree model property

Veamos primero unos ejemplos de cómo se puede transformar un modelo en otro con forma de árbol, que preserve satisfacibilidad:



Tree model property





Tree model property

La idea intuitiva entonces es construir un modelo en donde:

- Los elementos del modelo sean *secuencias finitas* de sucesores desde la raiz .
- Las secuencias van a estar relacionadas teniendo en cuenta la relación de accesibilidad original.
- La valuación va a depender del último elemento de la secuencia.

Intentemos definir formalmente esto …

Tree model property

Dado un modelo $\mathcal{M}$ con raíz w, vamos a construir $\mathcal{M}' = (W', R', V')$.

- Los elementos de W' son todas las secuencias finitas $(w \stackrel{R_{a_1}}{\to} u_1 \cdots \stackrel{R_{a_n}}{\to} u_n)$ tal que para alguna modalidad $\langle a_1 \rangle, \ldots, \langle a_n \rangle$ hay un path $wR_{a_1}u_1R_{a_2}u_2 \ldots R_{a_n}u_n$ en $\mathcal{M}$.
- $(w \stackrel{R_{a_1}}{\to} u_1 \cdots \stackrel{R_{a_n}}{\to} u_n)R'_a(w \stackrel{R_{a'_1}}{\to} v_1 \cdots \stackrel{R_{a'_m}}{\to} v_m)$ sii $m = n+1, v_i = u_i, a_i = a'_i$ para todo $1 \leq i \leq n$, $R_{a'_m} = R_a$ y $u_nR_av_m$ vale en $\mathcal{M}$.
- V' está definida como $(w \stackrel{R_{a_1}}{\to} u_1 \cdots \stackrel{R_{a_n}}{\to} u_n) \in V'(p)$ sii $u_n \in V(P)$.

Claramente $\mathcal{M}'$ tiene forma de árbol. Tenemos que demostrar que el mapeo $f : (w \stackrel{R_{a_1}}{\to} u_1 \cdots \stackrel{R_{a_n}}{\to} u_n) \to u_n$ define un morfismo acotado suryectivo.

Tree model property

Recordemos lo que era un morfismo acotado:

Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}'$ modelos. Un mapeo
$f : \mathcal{M} = (W, R, V) \to \mathcal{M}' = (W', R', V')$ es un *morfismo acotado* si:

I. w y $f(w)$ satisfacen las mismas variables proposicionales.

II. Si wRv entonces $f(w)R'f(v)$.

III. Si $f(w)R'v'$, entonces existe un v tal que wRv y $f(v) = v'$.

A partir de la manera en la que construimos $\mathcal{M}'$ no es difícil ver que
$f : (w \stackrel{R_{a_1}}{\to} u_1 \cdots \stackrel{R_{a_n}}{\to} u_n) \to u_n$ define un morfismo acotado suryectivo.

Tree model property

Entonces, resumiendo lo que hicimos, supongamos que φ es satisfecha en un modelo $\mathcal{M}$, en un punto w:

1. Construimos $\mathcal{M}'$, el submodelo generado a partir de w. Como los submodelos generados preservan satisfacibilidad, sabemos que $\mathcal{M}', w \models \varphi$.
2. Como $\mathcal{M}'$ es un modelo con raíz en w, podemos generar un modelo $\mathcal{M}''$ con forma de árbol (siguiendo el procedimiento que acabamos de ver), en donde además $\mathcal{M}'', w \models \varphi$.

Entonces, cualquier fórmula satisfacible puede ser satisfecha en un modelo con forma de árbol.

Propiedad de modelo finito

Los resultados de invariancia pueden verse en forma negativa o positiva:

- (-): Nos hablan de los límites de la expresividad de los lenguajes modales.
- (+): Son una herramienta para transformar modelos en otros, modificando propiedades estructurales sin afectar la satisfacibilidad.

Propiedad de modelo finito

Vamos a probar que el lenguaje modal básico tiene la propiedad de *modelo finito*: Si una fórmula es satisfecha en un modelo arbitrario, entonces es satisfacible en un modelo finito.

- **Propiedad de modelo finito**. Sea C una clase de modelos. Decimos que un lenguaje tiene la propiedad de modelo finito con respecto a C si vale lo siguiente: Si φ es una fórmula del lenguaje que es satisfacible en un modelo de C, entonces φ es satisfecha en un modelo finito de C.

Por ahora nos vamos a preocupar sólo por el caso en el que C es la clase de *todos* los modelos de la lógica modal básica.

Propiedad de modelo finito

De nuevo podemos ver este resultado desde dos perspectivas:

- (-): El lenguaje modal básico carece del poder expresivo suficiente para forzar la existencia de modelos infinitos.
- (+): No tenemos que preocuparnos por modelos infinitos arbitrarios, porque siempre vamos a poder encontrar uno finito equivalente. Más adelante, esto nos va a permitir probar resultados de decidibilidad.

En particular, vamos a probar esta propiedad a través de un procedimiento llamado *de selección*.

Propiedad de modelo finito

Podemos empezar con la siguiente pregunta: ¿Cuánto del modelo ve una fórmula modal desde el estado actual?

- Intuitivamente, depende de cuál es el anidamiento de modalidades que la fórmula contiene.

El *grado* de una fórmula está definido de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} deg(p) & = & 0 \\ deg(\neg\varphi) & = & deg(\varphi) \\ deg(\varphi \wedge \psi) & = & max\{deg(\varphi), deg(\psi)\} \\ deg(\Diamond\varphi) & = & 1 + deg(\varphi) \end{array}$$

Propiedad de modelo finito

Veamos primero la siguiente propiedad.

Prop 1: Sea un lenguaje con una signatura finita (esto es, finitos símbolos proposicionales y modalidades).

I. Para todo n, sólo hay un conjunto finito de fórmulas de grado a lo sumo n que no son lógicamente equivalentes.
II. Para todo n, modelo $\mathcal{M}$ y estado w de $\mathcal{M}$, el conjunto de todas las fórmulas de grado a lo sumo n que son satisfechas en w es equivalente a una sola fórmula.

Demostración: i) Por inducción en n. ii) Es inmediato de i).

Propiedad de modelo finito

Veamos también que hay una manera de aproximarnos en forma finita a la noción de bisimulación. Esto nos va a servir más adelante para buscar un modelo finito.

n-bisimulación: Sean dos modelos $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}'$, y w y w' dos mundos de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}'$ respectivamente. Decimos que w y w' son n-bisimilares (notación $w \underline{\leftrightarrow}_n w'$) si existe una secuencia de relaciones binarias $Z_n \subseteq \cdots \subseteq Z_0$ con las siguientes propiedades (con $i + 1 \leq n$):

I. $wZ_n w'$

II. Si vZ_0v' entonces v y v' acuerdan en todas las proposiciones.

III. Si $vZ_{i+1}v'$ y Rvu, entonces existe u' con $R'v'u'$ y uZ_iu'

IV. Si $vZ_{i+1}v'$ y $R'v'u'$, entonces existe u con Rvu y uZ_iu'

Propiedad de modelo finito

La intuición nos dice que:

- Si $w \underline{\leftrightarrow}_n w'$ entonces w y w' son bisimilares hasta el nivel n.
- Si $w \underline{\leftrightarrow} w'$ entonces $w \underline{\leftrightarrow}_n w'$ para todo n.
- Pero la vuelta no vale (ejercicio: Pensar un contraejemplo).

Propiedad de modelo finito

Vamos a ver ahora que que con lenguajes de signatura finita, hay una coincidencia exacta entre equivalencia modal y n-bisimilaridad para todo n.

Prop 2: Sea un lenguaje con una signatura finita, y dos modelos $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}'$ de este lenguaje. Entonces, para todo w de $\mathcal{M}$ y w' de $\mathcal{M}'$ los siguientes puntos son equivalentes:

I. $w \underline{\leftrightarrow}_n w'$

II. w y w' acuerdan en todas las fórmulas modales de grado a lo sumo n.

De esto se sigue que la noción de "n-bisimilaridad para todo n" y equivalencia modal coinciden.

Demostración: i) $\Rightarrow$ ii) por inducción en n. La conversa se puede usar un argumento similar al de la prueba de Henessy-Milner.

Propiedad de modelo finito

- Vamos a definir la *altura* de un modelo rooted de la siguiente manera: Sea $\mathcal{M}$ un modelo con raíz w. El único elemento con altura 0 es w. Los estados con altura $n+1$ son los inmediatos sucesores de los estados con altura n que todavía no fueron asignados con una altura menor a $n+1$.
- La altura de un modelo $\mathcal{M}$ es el máximo n tal que existe un estado en $\mathcal{M}$ con altura n, si es que tal máximo existe. Si no existe, la altura de $\mathcal{M}$ es infinita. La altura de w la notamos $height(w)$.
- Para un natural k, la restricción de $\mathcal{M}$ a k (notación: $\mathcal{M} \upharpoonright k$) está definida como: $(\mathcal{M} \upharpoonright k) = (W_k, \{R_{ik}\}, V_k)$ donde $W_k = \{v \mid height(v) \leq k\}$, $R_{ik} = R_i \cap (W_k \times W_k)$, y para cada p, $V_k(p) = V(p) \cap W_k$.

Propiedad de modelo finito

Ahora podemos decir más formalmente cuánto de un modelo ve una fórmula en relación a su profundidad modal.

Prop 3: Sea $\mathcal{M}$ un modelo rooted, y sea k un número natural. Entonces, por cada estado w de $(\mathcal{M} \restriction k)$ vale que $(\mathcal{M} \restriction k), w \underline{\leftrightarrow}_l \mathcal{M}, w$, donde $l = k - \mathit{height}(w)$.

Demostración: Tomar la relación de identidad sobre $(\mathcal{M} \restriction k)$.

- Poniendo juntas las proposiciones 2 y 3, podemos concluir que cualquier fórmula satisfacible puede ser satisfecha en un modelo de *altura finita*. Esto nos acerca a lo que buscamos, pero el modelo resultante todavía puede tener *branching infinito*.

Propiedad de modelo finito

Vamos a obtener un modelo finito *seleccionando* puntos y descartando ramas no deseadas.

Teorema: **Modelo Finito - vía selección**. Sea φ una fórmula de la lógica modal básica. Si φ es satisfacible, entonces es satisfacible en un modelo finito.

Demostración: Sea φ una fórmula con $deg(\varphi) = k$. Vamos a restringir la signatura a los operadores modales y proposiciones que aparezcan en φ. Sea $\mathcal{M}_1, w_1$ tal que $\mathcal{M}_1, w_1 \models \varphi$.

1. Por la *tree model property*, existe $\mathcal{M}_2$ con forma de árbol y raíz w_2 tal que $\mathcal{M}_2, w_2 \models \varphi$.
2. Sea $\mathcal{M}_3 = (\mathcal{M}_2 \restriction k)$. Por la **Prop 3**, vale $\mathcal{M}_2, w_2 \leftrightarrows_k \mathcal{M}_3, w_2$, y por la **Prop 2**, tenemos que $\mathcal{M}_3, w_2 \models \varphi$.

Propiedad de modelo finito

3. Por inducción en $i \leq k$ vamos a definir los conjuntos $S_0, \ldots, S_k$ y modelo final $\mathcal{M}_4$ con dominio $S_0 \cup \cdots \cup S_k$. Los puntos en cada S_i van a tener altura i.
4. Definimos $S_0 = \{w_2\}$ y supongamos que $S_0, \ldots, S_i$ ya fueron definidos. Fijemos un elemento v de S_i. Por la **Prop 1** hay sólo finitas fórmulas no equivalentes con grado a lo sumo k. Llamémoslas $\psi_1, \ldots, \psi_m$. Para cada una de esas fórmulas de la forma $\langle a \rangle \rho$ que vale en $\mathcal{M}_3$ en el punto v, seleccionemos un estado u de $\mathcal{M}_3$ tal que $R_a vu$ y $\mathcal{M}_3, u \models \rho$. Agreguemos todos los puntos us a S_{i+1} y repitamos este proceso de selección para cada punto de S_i.
5. Definimos a S_{i+1} como el conjunto de todos los puntos seleccionados de esta manera.

Propiedad de modelo finito

6. Finalmente, definimos $\mathcal{M}_4$ como:

   I. Su dominio es $S_0 \cup \cdots \cup S_k$. Como cada S_i es finito, $\mathcal{M}_4$ es finito.

   II. Sus relaciones y valuaciones se obtienen restringiendo las relaciones y valuaciones de $\mathcal{M}_3$ al dominio de $\mathcal{M}_4$.

7. No es difícil probar que $\mathcal{M}_4, w_2 \underline{\leftrightarrow}_k \mathcal{M}_3, w_2$, y por lo tanto $\mathcal{M}_4, w_2 \models \varphi$.

Propiedad de modelo finito

El método que acabamos de ver tiene sus ventajas y desventajas:

- (+): En muchos casos el método se adapta bien a distintas lógicas. Son los casos en los que las nociones de **árbol**, n**-bisimulación** y el **procedimiento de selección** en sí se adaptan bien.
- (-): El modelo de entrada puede satisfacer **relaciones estructurales** importantes para nosotros, pero el resultado es siempre un árbol finito, y esas propiedades usualmente se pierden. Eso hace que si queremos probar la propiedad de modelo finito para alguna clase de modelos en especial, probablemente tengamos que hacer más trabajo adicional.

Aparecen las filtraciones

- Otro método de probar la propiedad de modelos finitos
- Idea:
  - No se *seleccionan* finitos sucesores (en un árbol)
  - En cambio, se *cocientan* todos los elementos del modelo
  - El criterio para cocientar es: "cosas que φ no puede distinguir"
- Ventajas:
  - Nos va a dar margen para jugar con las relaciones
- Aclaración:
  - En lo que sigue asumimos que hay una única relación
  - Pero la generalización es trivial

Preliminares

Definición (Conjunto cerrado por subfórmulas)

Un conjunto de fórmulas Σ está *cerrado por subfórmulas* si para todo par de fórmulas φ y ψ, si $\varphi \in \Sigma$ y ψ es subfórmula de φ, entonces $\psi \in \Sigma$

Definición

Sea Σ un conjunto cerrado por subfórmulas, y sea $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$. Llamamos $\leftrightsquigarrow_\Sigma$ a la relación de equivalencia sobre W dada por

$$\leftrightsquigarrow_\Sigma := \{(w, v) \mid \text{para todo } \varphi \in \Sigma, \mathcal{M}, w \models \varphi \text{ sii } \mathcal{M}, v \models \varphi\}$$

Con ustedes, las filtraciones

Definición (Filtración)

Sea $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ y sea Σ un conjunto cerrado por subfórmulas. Se llama *filtración de* $\mathcal{M}$ *vía* Σ a cualquier modelo $\mathcal{M}^f = \langle W^f, R^f, V^f \rangle$ que cumpla

I. $W^f = W / \leftrightsquigarrow_\Sigma$

II. Si Rwv, entonces $R^f[w][v]$

III. Si $R^f[w][v]$ y $\Diamond\varphi \in \Sigma$, entonces $\mathcal{M}, v \models \varphi$ implica $\mathcal{M}, w \models \Diamond\varphi$

IV. $V^f(p) = \{[w] \mid \mathcal{M}, w \models p\}$ para todo $p \in \Sigma$

- Las condiciones II y III tienen algo de zig y zag
- Intuitivamente, nos dicen qué pares tiene que tener R^f como mínimo (II) y como máximo (III).

Filtraciones…¿para que?

Teorema (Filtration Theorem)

Sea $\mathcal{M}^f$ la filtración vía Σ de $\mathcal{M}$, donde Σ es un conjunto de fórmulas de la lógica modal básica, cerrado por subfórmulas. Para toda fórmula $\varphi \in \Sigma$ y todo elemento w de $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}, w \models \varphi$ sii $\mathcal{M}^f, [w] \models \varphi$

Demostración.

Inducción en φ. Caso base, por definición de V^f. Booleanos, por HI.

- Si $\Diamond\psi \in \Sigma$ y $\mathcal{M}, w \models \Diamond\psi$
  - Existe v tal que Rwv y $\mathcal{M}, v \models \psi$
  - Por II, $R^f[w][v]$ y como $\psi \in \Sigma$, por HI $\mathcal{M}^f, [v] \models \psi$
  - Con lo cual $\mathcal{M}^f, [w] \models \Diamond\psi$
- Si $\Diamond\psi \in \Sigma$ y $\mathcal{M}^f, [w] \models \Diamond\psi$
  - Para algún $[v]$, $R^f[w][v]$ y $\mathcal{M}^f, [v] \models \psi$
  - Como $\psi \in \Sigma$, por HI, $\mathcal{M}, v \models \psi$; luego, por III $\mathcal{M}, w \models \Diamond\psi$

$\square$

Filtraciones, mito o realidad

- Si $\mathcal{M}^f$ cumple ciertas condiciones, vale el Filtration Theorem
- Preguntas:
  - ¿Serán condiciones que se pueden cumplir?
  - O sea, dado $\mathcal{M}$ y Σ, existirá siempre una filtración de $\mathcal{M}$ vía Σ

Filtraciones, ¡realidad!

Teorema

Sea $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ y sea Σ un conjunto cerrado por subfórmulas. Llamemos W^f a $W / \leftrightsquigarrow_\Sigma$, y V^f a la valuación que cumple con IV. *Entonces, $\mathcal{M}^s = \langle W^f, R^s, V^f \rangle$ y $\mathcal{M}^l = \langle W^f, R^l, V^f \rangle$ son filtraciones de $\mathcal{M}$ vía Σ, donde*

$$
\begin{array}{lll}
R^s[w][v] & \textit{sii} & \exists w' \in [w] \text{ y } \exists v' \in [v] \textit{ tal que } Rw'v' \\
R^l[w][v] & \textit{sii} & \textit{para toda } \Diamond\varphi \in \Sigma, \mathcal{M}, v \models \varphi \textit{ implica } \mathcal{M}, w \models \Diamond\varphi
\end{array}
$$

Además, si $\mathcal{M}^f = \langle W^f, R^f, V^f \rangle$ es una filtración de $\mathcal{M}$ vía Σ, entonces $R^s \subseteq R^f \subseteq R^l$

Filtraciones, ¡realidad!

Demostración.

Veamos que $\mathcal{M}^s = \langle W^f, R^s, V^f \rangle$ es una filtración (el resto... **ejercicio!**). Alcanza con ver que R^s cumple con II y III.

- R^s cumple II por definición
- Para III, supongamos que $R^s[w][v]$ y que $\mathcal{M}, v \models \varphi$ para $\Diamond\varphi \in \Sigma$
- Necesitamos ver que $\mathcal{M}, w \models \Diamond\varphi$
- Como $R^s[w][v]$, existen $w' \in [w]$ y $v' \in [v]$ tales que $Rw'v'$
- Pero $\varphi \in \Sigma$, y $v' \leftrightsquigarrow_\Sigma v$, con lo cual $\mathcal{M}, v' \models \varphi$
- Luego, $\mathcal{M}, w' \models \Diamond\varphi$
- Pero como $w' \leftrightsquigarrow_\Sigma w$ y $\Diamond\varphi \in \Sigma$, $\mathcal{M}, w \models \Diamond\varphi$

$\square$

Propiedad de modelos finitos vía filtraciones

Teorema

Sea φ una fórmula de la lógica modal básica. Si φ es satisfacible, es satisfacible en un modelo finito, que contiene a lo sumo 2^m nodos, donde m es la cantidad de subfórmulas de φ ($m \leq |\varphi|$)

Demostración.

- Supongamos que φ es satisfacible, i.e., $\mathcal{M}, w \models \varphi$
- Sea $\Sigma := \{\psi \mid \psi \text{ es subfórmula de } \varphi\}$. Observar que Σ es finito
- Sea, además, $\mathcal{M}^f$ una filtración de $\mathcal{M}$ vía Σ.
- Vale $\mathcal{M}^f, [w] \models \varphi$
- ¿Cuántos elementos tiene $\mathcal{M}^f$?
- ¡A lo sumo $2^{|\Sigma|}$!

□