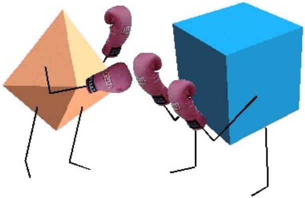
Lógica Modal Computacional

Bisimulaciones



Daniel Gorín & Sergio Mera

1er Cuatrimestre 2010,
Buenos Aires, Argentina

Isomorfismos, equivalencia estructural

- Tema de hoy: "equivalencias de modelos"
- ¿Cuál es la noción de igualdad para un modelo de primer orden?

Definición (Isomorfismo de modelos)

Sean $\mathcal{M} = \langle M, \cdot^{\mathcal{M}} \rangle$ y $\mathcal{N} = \langle N, \cdot^{\mathcal{N}} \rangle$ dos modelos de primer orden sobre la misma signatura. Decimos que $i : M \to N$ es un isomorfismo entre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ si

I. i es biyectiva

II. $(x_1, \ldots, x_n) \in P^{\mathcal{M}}$ sii $(i(x_1), \ldots, i(x_n)) \in P^{\mathcal{N}}$

III. $i(f^{\mathcal{M}}(x_1, \ldots, x_n)) = f^{\mathcal{N}}(i(x_1), \ldots i(x_n))$

IV. $i(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$

Isomorfismos, equivalencia estructural

- Estamos acostumbrados a que *isomorfo* signifique *equivalente*
- Con lo cual no es sorpresa que…

Teorema

Si i es un isomorfismo entre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$, entonces, para toda g tenemos

$$\mathcal{M}, g \models \varphi \quad \textit{sii} \quad \mathcal{N}, i \circ g \models \varphi$$

Demostración.

Fácil, por inducción estructural en φ $\square$

$\boxed{\text{Ojo ¡Prestar atención al sentido de la implicación!}}$

¿Distingue siempre primer orden modelos no-isomorfos?

Sea $\mathcal{M}$ un modelo cuyo dominio es $\mathbb{R}$ y definamos
$\Gamma = \{\varphi \mid \mathcal{M} \models \varphi\}$

1. Por definición, $\mathcal{M} \models \Gamma$, con lo cual, Γ es satisfacible
2. Por Löwenheim-Skolem, para algún $\mathcal{N}$ numerable, $\mathcal{N} \models \Gamma$
3. $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ tienen cardinales distintos…*no pueden ser isomorfos*

¿Podemos distinguir en primer orden a $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$?

- $\mathcal{M} \models \varphi \Longrightarrow \varphi \in \Gamma \Longrightarrow \mathcal{N} \models \varphi$
- $\mathcal{M} \not\models \varphi \Longrightarrow \mathcal{M} \models \neg\varphi \Longrightarrow \neg\varphi \in \Gamma \Longrightarrow \mathcal{N} \models \neg\varphi \Longrightarrow \mathcal{N} \not\models \varphi$
- Es decir, $\mathcal{M} \models \varphi$ sii $\mathcal{N} \models \varphi$…¡no podemos distinguirlos!

Pregunta ¿Habrá una noción de equivalencia para primer orden más aproximada que isomorfismo?

Isomorfismos potenciales

Definición (Isomorfismo parcial)

Dados $\mathcal{M} = \langle M, \cdot^{\mathcal{M}} \rangle$ y $\mathcal{N} = \langle N, \cdot^{\mathcal{N}} \rangle$, decimos que $p : M' \to N'$ (con $M' \subseteq M$ y $N' \subseteq N$) es un *isomorfismo parcial* entre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ si p es un isomorfismo entre $\mathcal{M} \upharpoonright M'$ y $\mathcal{N} \upharpoonright N'$

Definición (Isomorfismo potencial)

Un *isomorfismo potencial* entre dos modelos $\mathcal{M} = \langle M, \cdot^{\mathcal{M}} \rangle$ y $\mathcal{N} = \langle N, \cdot^{\mathcal{N}} \rangle$ es una colección F de isomorfismos parciales *finitos* entre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ que satisfacen:

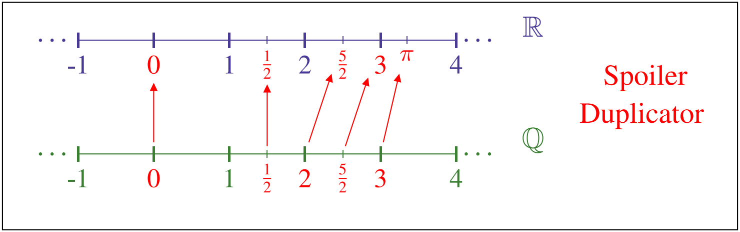
I. (zig) Si $p \in F$ y $x \in M$, existe $y \in N$ tal que $p \cup \{x \mapsto y\} \in F$

II. (zag) Si $p \in F$ e $y \in N$, existe $x \in M$ tal que $p \cup \{x \mapsto y\} \in F$

Isomorfismos potenciales

Ejemplo – Isomorfismo potencial entre $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ y $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$

- Un juego entre dos jugadores: *Spoiler* y *Duplicator*
  - *Spoiler* elige elementos (los más difíciles que pueda)
  - *Duplicator* le responde extendiendo un isomorfismo parcial



- Como $\mathbb{Q}$ es denso, *Duplicator* siempre puede responder
- Cada estrategia ganadora induce un **isomorfismo potencial**

Preservación por isomorfismos potenciales

Proposición

Dos modelos numerables potencialmente isomorfos son isomorfos

Demostración.

(*Idea*) Tomar un isomorfismo potencial F entre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ y elegir un $p \in F$. Por definición, p se puede extender tantas veces como uno quiera y, en el límite, esto nos da un isomorfismo. $\square$

Teorema

Si existe un isomorfismo potencial F entre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$, entonces, para toda fórmula de primer orden φ

$$\mathcal{M} \models \varphi \quad \textit{sii} \quad \mathcal{N} \models \varphi$$

¿Valdrá la vuelta?

- Consideremos $\mathcal{S} = \langle <, 0, 1, 2, \ldots \rangle$ y $\mathcal{S}' = \langle <, c, 0, 1, 2, \ldots \rangle$
- Y tomemos a $\mathbb{N}$ como modelo sobre la signatura $\mathcal{S}$
- Definamos $\Gamma_{\mathbb{N}} = \{\varphi \mid \mathbb{N} \models \varphi\}$ y $\Sigma = \{0 < c, 1 < c, 2 < c, \ldots\}$
- Por Compacidad, $\Gamma_{\mathbb{N}} \cup \Sigma$ es satisfacible
- Y por Löwenheim-Skolem, tiene algún modelo numerable $\mathcal{M}$
- Ahora, sea $\mathcal{M}_0$ la restricción de $\mathcal{M}$ a la signatura $\mathcal{S}$
- Observar que $\mathbb{N} \models \varphi$ sii $\mathcal{M}_0 \models \varphi$ (porque $\mathcal{M}_0 \models \Gamma_{\mathbb{N}}$)
- ¡Pero $\mathbb{N}$ y $\mathcal{M}_0$ no pueden ser isomorfos! (porque $c^{\mathcal{M}} \mapsto$???)
- Y por ser numerables, tampoco son potencialmente isomorfos

¿Buscamos más equivalencias?

Teorema (Keisler-Shelah Isomorphism Theorem)

$\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ coinciden en toda sentencia de primer orden sii existe un isomorfismo entre sus ultrapotencias

- Llegado este momento, tenemos dos alternativas:
  1. Dedicar el resto del cuatrimestre a entender lo que es la ultrapotencia de un modelo
  2. Pasar al caso modal…

Pero antes, recapitulemos…

- Isomorfismo
  - Noción “natural” de equivalencia de modelos
  - Hay modelos no-isomorfos que primer orden no puede distinguir
- Isomorfismo potencial
  - Generalización de isomorfismo a estructuras de distinto cardinal
  - Hay modelos no-potencialmente isomorfos que primer orden tampoco puede distinguir
- Isomorfismo de las ultrapotencias
  - Captura adecuadamente la noción de equivalencia de primer orden

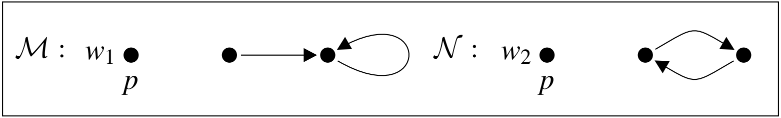
¿Y por modal cómo andamos?

- Por simple transferencia, si $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son potencialmente isomorfos, entonces para cada w existe un w' tal que

$$\mathcal{M}, w \models \varphi \quad \text{sii} \quad \mathcal{N}, w' \models \varphi$$

- ¿Será lo mejor que podemos decir?

Ejemplo – ¿Son modalmente distinguibles $\langle \mathcal{M}, w_1 \rangle$ y $\langle \mathcal{N}, w_2 \rangle$?



- $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son modelos finitos, para nada esotéricos …

Hacia una noción de equivalencia modal…

- Todas la nociones nociones de equivalencia que vimos para primer orden consideran los modelos "en su totalidad"
  - Es razonable para FO: la extensión de una sentencia es todo el dominio o el conjunto vacío
- ¿Tiene sentido hacer lo mismo en modal?

Bisimulaciones

Definición

Una *bisimulación* entre dos modelos $\mathcal{M} = \langle W, \{R_i\}, V\rangle$ y $\mathcal{N} = \langle W', \{R'_i\}, V'\rangle$ es una relación no-vacía $Z \subseteq W \times W'$ tal que si wZw', entonces:

(atom) $w \in V(p)$ sii $w' \in V'(p)$ para todo p

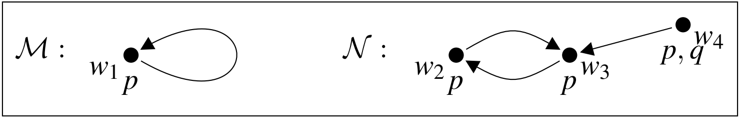
(zig) Si $R_i wv$, entonces existe v' tal que $R'_i w'v'$ y vZv'

(zag) Si $R'_i w'v'$, entonces existe v tal que $R_i wv$ y vZv'

Si existe una bisimulación entre $\mathcal{M}, w$ y $\mathcal{N}, w'$, decimos que éstos son *bisimilares*

Bisimulaciones (ejemplo)

Ejemplo



$$Z = \{(w_1, w_2), (w_1, w_3)\}$$

- Z es una bisimulación, ¿por qué?

Invarianza bajo bisimulaciones

Teorema

Si $\mathcal{M}, w$ y $\mathcal{N}, w'$ son bisimilares, entonces para toda fórmula φ de la lógica modal básica, $\mathcal{M}, w \models \varphi$ sii $\mathcal{N}, w' \models \varphi$.

Demostración.

Por inducción en φ, suponiendo wZw':

- Caso base: directo por la cláusula (atom)
- $\neg, \wedge, \ldots$: directo por hipótesis inductiva
- $\varphi = \langle r \rangle \psi$:
  - Si $\mathcal{M}, w \models \langle r \rangle \psi$, entonces
    - existe v tal que $R_r wv$ y $\mathcal{M}, v \models \psi$
    - luego, por (zig), existe v' tal que $R'_r w' v'$ y vZv'
    - y por HI, $\mathcal{N}, v' \models \psi$, con lo cual $\mathcal{N}, w' \models \langle r \rangle \psi$
  - Si $\mathcal{N}, w' \models \langle r \rangle \psi$, análogo con (zag)

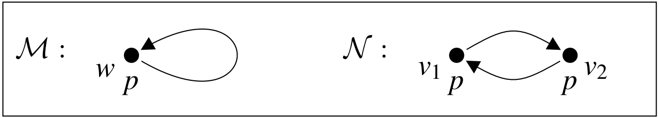
$\square$

Bisimulación y poder expresivo

- Teníamos una pregunta pendiente

> ¿Existe una traducción de fórmulas de FO2 con sólo una variable libre a la lógica modal básica?

- Consideremos estos modelos



- $Z = \{(w, v_1), (w, v_2)\}$ es una bisimulación
- Con lo cual para toda φ de la LMB, $\mathcal{M}, w \models \varphi$ sii $\mathcal{N}, v_1 \models \varphi$
- Ahora, $\mathcal{M}, g[x \mapsto w] \models R(x,x)$ pero $\mathcal{N}, g'[x \mapsto v_1] \not\models R(x,x)$
- ¡Con lo cual $R(x,x)$ no puede expresarse en lógica modal básica!

¿Y la vuelta?

Teorema

Si $\mathcal{M}, w$ *y* $\mathcal{N}, w'$ *son bisimilares, entonces para toda fórmula* φ *de la lógica modal básica,* $\mathcal{M}, w \models \varphi$ *sii* $\mathcal{N}, w' \models \varphi$.

$\boxed{\text{¿Valdrá la vuelta de la implicación?}}$

A veces vale la vuelta...

Teorema (Hennessy-Milner)

Si $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son modelos cuyas relaciones tienen imagen finita, $\langle \mathcal{M}, w\rangle$ y $\langle \mathcal{N}, v\rangle$ son bisimilares sii son modalmente equivalentes.

Demostración.

Basta ver que $Z := \{(w, v) \mid \text{para todo } \varphi\ \mathcal{M}, w \models \varphi \text{ sii } \mathcal{N}, v \models \varphi\}$ es una bisimulación. Para ello, suponemos wZv:

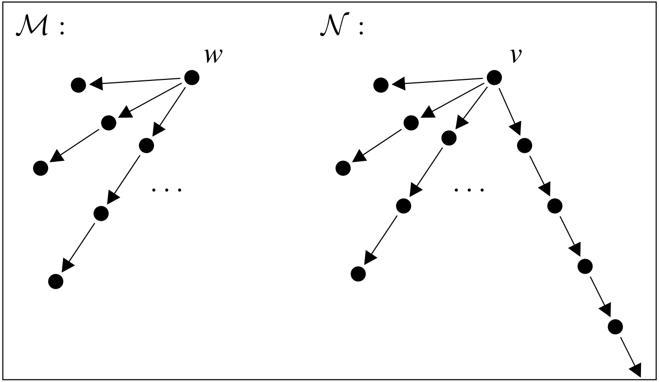
(atom) wZv implica $\mathcal{M}, w \models p$ sii $\mathcal{N}, v \models p$ para todo p

(zig)/(zag) Razonamos por el absurdo:

- Sea un Rww' tal que ningún v' cumple Rvv' y $w'Zv'$
- Definamos $S := \{v' \mid Rvv'\} = \{v_1, \ldots, v_k\}$ $(k > 0)$
- Existe $\{\varphi_1 \ldots, \varphi_k\}$ con $\mathcal{M}, w' \models \varphi_i$ y $\mathcal{N}, v_i \not\models \varphi_i$
- $\mathcal{M}, w \models \Diamond(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k)$ y $\mathcal{N}, v \not\models \Diamond(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k)$
- Absurdo! $\square$

. . . pero no siempre!

Ejemplo – Modalmente equivalentes pero no bisimilares



¿Cómo hacer que valga la vuelta?

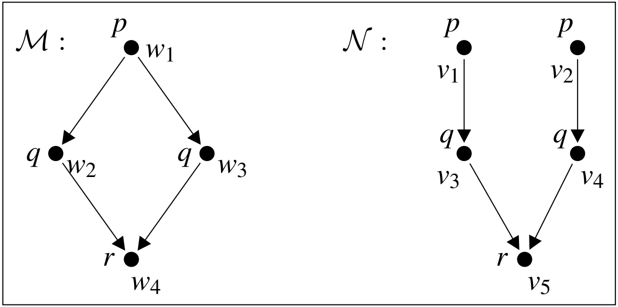
- En primer orden, necesitamos movernos a ultrapotencias para lograr que valga la vuelta
- En modal también necesitamos una construcción esotérica: las **ultrafilter extensions** (extensiones por ultrafiltros)

Teorema

Dos modelos son modalmente equivalentes sii sus extensiones por ultrafiltros son bisimilares

Unión de bisimulaciones

- Consideremos los siguientes modelos



- $Z_1 = \{(w_1, v_1), (w_2, v_3), (w_3, v_3), (w_4, v_5)\}$ y
  $Z_2 = \{(w_1, v_2), (w_2, v_4), (w_3, v_4), (w_4, v_5)\}$ son bisimulaciones
- ¿Es $Z_1 \cup Z_2$ una bisimulación?
- ¿Fue coincidencia?

Unión de bisimulaciones

Proposición

Si Z_1 y Z_2 son bisimulaciones entre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$, $Z_1 \cup Z_2$ también lo es

Demostración.

Fácil, suponer $(w, v) \in Z_1 \cup Z_2$ y ver que se cumplen (atom), (zig) y (zag) $\square$

Corolario

Si la unión de dos bisimulaciones entre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ es una bisimulación, la unión de **todas** las bisimulaciones es una bisimulación!
Es decir, si existe una bisimulación, existe una *bisimulación máxima*

Composición de bisimulaciones

Proposición

Sean $Z_1 \subseteq \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ *y* $Z_2 \subseteq \mathcal{M}_2 \times \mathcal{M}_3$ *dos bisimulaciones. Si* $Z_1 \circ Z_2$ *es no vacía, entonces es una bisimulación*

Demostración.

Sea $Z_3 := Z_1 \circ Z_2$ y supongamos wZ_3w' (con lo cual, existe v tal que wZ_1v y vZ_2w')

atom
- Como wZ_1v, w y v coinciden proposicionalmente
- Pero v y w' también (porque vZ_2w')
- Luego w y w' tienen que coincidir

zig
- Supongamos que existe w_2 tal que $R^{\mathcal{M}_1}ww_2$
- Por zig de Z_1 existe v_2 tal que $R^{\mathcal{M}_2}vv_2$ y $w_2Z_1v_2$
- Ahora, por zig de Z_2 tiene que existir w_2' tal que $R^{\mathcal{M}_3}w'w_2'$ y $v_2Z_2w_2'$. Pero entonces $w_2Z_3w_2'$.

zag Análogo

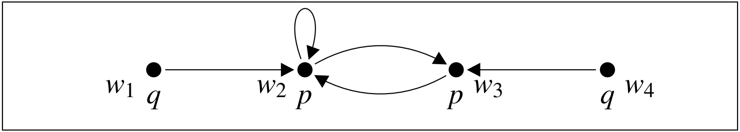
Autobisimulaciones

- Una bisimulación no relaciona (necesariamente) modelos enteros
- Relaciona partes de dos modelos
- Y nada impide que bisimulemos partes de un mismo modelo

Definición

Una *autobisimulación* es una bisimulación $Z \subseteq W \times W$ donde W es el dominio de un modelo $\mathcal{M}$

Ejemplo



- $\{(w_1, w_4), (w_2, w_3), (w_3, w_2), (w_2, w_2)\}$ es una autobisimulación

Autobisimulaciones máximas

- Dado $\mathcal{M} = \langle W, \{R_i\}, V\rangle$, la *relación identidad* dada por

$$Id = \{(w, w) \mid w \in W\}$$

  es una autobisimulación
- Luego, por el corolario anterior, todo modelo tiene una *autobisimulación máxima*
- Ejercicio: Mostrar que una autobisimulación máxima es una relación de equivalencia (i.e., reflexiva, simétrica y transitiva)

Contracción por bisimulaciones

Definición (Contracción por bisimulaciones)

Sea $\mathcal{M} = \langle W, \{R_i\}, V\rangle$ y sea $Z_{\mathcal{M}}$ su máxima autobisimulación. La *contracción de $\mathcal{M}$ por bisimulación* es el modelo $\langle W', \{R_i'\}, V'\rangle$ donde

$$\begin{array}{lcl} W' & := & W/Z_{\mathcal{M}} \\ R_i' & := & \{([w],[v]) \mid (w,v) \in R_i\} \\ V'(p) & := & \{[w] \mid w \in V(p)\} \end{array}$$

Proposición

Si $\mathcal{M} = \langle W, \{R_i\}, V\rangle$ es un modelo y $\mathcal{M}'$ es su contracción por bisimulación, entonces $\langle \mathcal{M}, w\rangle$ y $\langle \mathcal{M}', [w]\rangle$ son bisimilares

Demostración.

Basta ver que $Z := \{(w,[w]) \mid w \in W\}$ es una bisimulación (ejercicio!) $\square$

Contracción por bisimulaciones $\equiv$ Modelo mínimo

Proposición

La contracción por bisimulación de $\mathcal{M}$ es un modelo bisimilar a $\mathcal{M}$ de cardinalidad mínima (lo notamos $\min(\mathcal{M})$*)*

Demostración.

Ejercicio!!! $\square$

Modelo mínimo: aplicaciones

Ejemplo - Verificación de software

Objetivo: Verificar propiedades de un sistema de software

Método:

I. Se representa al sistema con un autómata finito $\mathcal{A}$
II. Cada propiedad p se expresa con una fórmula φ_p
III. Para cada p, se prueba si $\mathcal{A}, \mathsf{inicio} \models \varphi_p$

Idea:

- Determinar $\mathcal{A}, \mathsf{inicio} \models \varphi_p$ depende de $|\mathcal{A}|$
- Conviene determinar $\min(\mathcal{A}), [\mathsf{inicio}] \models \varphi_p$

Pero:

- Calcular $\min(\mathcal{A})$ también cuesta
- Hay que evaluar cuándo conviene

Unión disjunta de modelos

Definición

Dados una colección no vacía de modelos $\mathcal{M}^k = \langle W^k, \{R_i^k\}, V^k \rangle$, todos sobre la misma signatura $\mathcal{S}$, y donde $W^i \cap W^j = \emptyset$ para todo $i \neq j$, la unión disjunta $\biguplus\{\mathcal{M}^k\} := \langle W, \{R_i\}, V \rangle$ es el modelo en $\mathcal{S}$ dado por:

$$
\begin{aligned}
W &:= \bigcup_k W^k \\
R_i &:= \bigcup_k R_i^k \\
V(p) &:= \bigcup_k V^k(p)
\end{aligned}
$$

Invarianza sobre unión disjunta

Proposición

Sea C una colección de modelos disjuntos, y sea $\mathcal{M}$ un modelo en C. Para todo w en el dominio de $\mathcal{M}$,

$$\mathcal{M}, w \leftrightarroweq \biguplus C, w$$

Demostración.

Suponiendo que W es el dominio de $\mathcal{M}$, alcanza con ver que $\{(x,x) \mid x \in W\}$ es una bisimulación (fácil) $\square$

Corolario

Satisfacción de fórmulas de la lógica modal básica es invariante respecto de unión disjuntas

Unión disjunta y expresividad

¿Será verdad que la modalidad universal no puede expresarse en la lógica modal básica?

- Supongamos que no es verdad y que es posible expresarla
- A la fórmula $\mathsf{A}p$ debe corresponderle una fórmula φ
- Ahora, consideremos estos dos modelos:

- $\mathcal{M}_1, w \models \varphi$, y por lo tanto, $\biguplus\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2\}, w \models \varphi$
- Pero $\biguplus\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2\}, w \not\models \mathsf{A}p$ ¡Absurdo!

Submodelo generado

Definición (Submodelo)

Dados $\mathcal{M} = \langle W, \{R_i\}, V\rangle$ y $\mathcal{N} = \langle W', \{R'_i\}, V'\rangle$, decimos que $\mathcal{N}$ es un *submodelo* de $\mathcal{M}$ si

1. $W' \subseteq W$
2. $R'_i = R_i \cap (W' \times W')$
3. $V'(p) = V(p) \cap (W' \times W')$

Definición (Submodelo generado)

Sean $\mathcal{M} = \langle W, \{R_i\}, V\rangle$ y $\mathcal{N} = \langle W', \{R'_i\}, V'\rangle$. Decimos que $\mathcal{N}$ es un *submodelo generado* de $\mathcal{M}$ si

1. $\mathcal{N}$ es un submodelo de $\mathcal{M}$
2. Para todo $w \in W'$, si existe $v \in W$ tal que $R_i wv$, entonces $v \in W'$

Invarianza sobre submodelos generados

Proposición

Sea $\mathcal{N}$ un submodelo generado de $\mathcal{M}$. Para todo w en el dominio de $\mathcal{N}$,

$$\mathcal{M}, w \;\underline{\leftrightarrow}\; \mathcal{N}, w$$

Demostración.

Suponiendo que W es el dominio de $\mathcal{N}$, alcanza con ver que $\{(x, x) \mid x \in W\}$ es una bisimulación (fácil) $\square$

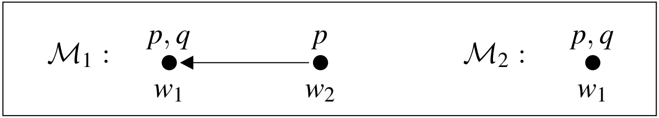
Corolario

Satisfacción de fórmulas de la lógica modal básica es invariante respecto de submodelos generados

Submodelo generado y expresividad

> ¿Será verdad que el operador de pasado no puede expresarse en la lógica modal básica?

- Supongamos que no es verdad y que podemos expresarlo
- A la fórmula $\langle R\rangle^{-1}p$ debe corresponderle una fórmula φ
- Ahora, consideremos estos dos modelos:



- $\mathcal{M}_2$ es un submodelo generado de $\mathcal{M}_1$
- Y como $\mathcal{M}_1, w_1 \models \varphi$ entonces $\mathcal{M}_2, w_1 \models \varphi$
- Pero $\mathcal{M}_2, w_1 \not\models \langle R\rangle^{-1}p$ ¡Absurdo!

Morfismos: una versión “funcional” de preservación

monomorfismos
epimorfismos
bimorfismos
isomorfismos
endomorfismos
automorfismos
holomorfismos
⋮

Morfismo Mapping de un objeto matemático a otro que preserva estructura

- Cuanta más estructura “se preserva”, más resultados de invarianza se tienen
- Un isomorfismo preserva toda la estructura, en ambas direcciones (objetos isomorfos son matemáticamente equivalentes)
- ¿Cuál es la noción de morfismo apropiada para la lógica modal (básica)?

Morfismos: una versión “funcional” de preservación

Definición

Sean $\mathcal{M} = \langle W, \{R_i\}, V\rangle$ y $\mathcal{N} = \langle W', \{R'_i\}, V'\rangle$ modelos sobre la misma signatura. La función $f : W \to W'$ es un p-morfismo (o *bounded morphism*) si se cumple:

- **atom** $w \in V(p)$ sii $f(w) \in V(p)$
- **zig** Si Rwv, entonces $R'f(w)f(v)$
- **zag** Si $R'f(w)v'$, entonces existe v tal que $f(v) = v'$ y Rwv

- f es “sólo” una bisimulación que, además, es función
- Pero la noción de bisimulación surge como generalización del p-morfismo

Caracterización de van Benthem

Hasta ahora teníamos una pregunta pendiente con respecto a expresividad modal:

- ¿Cuál es exactamente el fragmento modal de la lógica de primer orden? Esto es, ¿Qué fórmulas de primer orden son equivalentes a la traducción estándar de fórmulas modales?
- ¿Qué propiedades de lo modelos son definibles a través de fórmulas modales?

Vamos a intentar contestarlas en esta sección, con un resultado que se conoce como el *teorema de caracterización de van Benthem*.

Caracterización de van Benthem

Definamos primero algunas cosas: $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ es un *embedding* elemental de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ (notación $f : \mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$) cuando $\mathcal{A}$ es un submodelo de $\mathcal{B}$ y para toda fórmula de primer orden $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ y todas n-upla $a_1, \ldots, a_n$ de $\mathcal{A}$ vale

$$\mathcal{A} \models \alpha[a_1, \ldots a_n] \text{ sii } \mathcal{B} \models \alpha[f(a_1), \ldots, f(a_n)]$$

Cuando existe un embedding de este tipo entre dos modelos, sabemos que en los elementos que el embedding relaciona se satisfacen las mismas fórmulas de primer orden.

Caracterización de van Benthem

Ya vimos que existía un operador llamado *ultrapotencia*, que dado un modelo $\mathcal{M}$, nos devolvía otro $\mathcal{M}^*$ en donde las nociones de equivalencia modal y bisimulación coincidían.

Detour Lemma: Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ dos modelos, y w y v dos estados de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ respectivamente. Entonces, las siguientes propiedades son equivalentes:

I. Para toda fórmula modal φ: $\mathcal{M}, w \models \varphi$ sii $\mathcal{N}, v \models \varphi$
II. Existen modelos $\mathcal{M}^*, w^*$ y $\mathcal{N}^*, v^*$ y embeddings elementales $f : \mathcal{M} \preceq \mathcal{M}^*$ y $g : \mathcal{N} \preceq \mathcal{N}^*$ tales que:
   (a) $f(w) = w^*$ y $g(v) = v^*$
   (b) $\mathcal{M}^*, w^* \underline{\leftrightarrow} \mathcal{N}^*, v^*$

La demostración apela a cuestiones de teoría clásica de primer orden. De la misma forma que cuando presentamos las ultrapotencias, vamos a dejar la demostración para otro momento...

Caracterización de van Benthem

Con el resultado del lema de Detour, estamos en condiciones de probar el teorema de caracterización de van Benthem. Intuitivamente, este teorema nos dice que la noción de bisimulación es la noción correcta y nos dice cuál es la relación entre lógica de primer orden, lógica modal y bisimulaciones.

Tenemos que definir primero un concepto que usamos informalmente en otras ocasiones:

Una fórmula de primer orden $\alpha(x)$, en el lenguaje de correspondencia de la traducción estándar $\mathcal{L}$, es *invariante bajo bisimulaciones* cuando para cualquier par de modelos $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$, cualquier estado $w \in \mathcal{M}$ y $v \in \mathcal{N}$ y cualquier bisimulación Z tal que wZv, tenemos que $\mathcal{M}, g_w^x \models \alpha(x)$ sii $\mathcal{N}, g_v^x \models \alpha(x)$.

Caracterización de van Benthem

Ahora podemos enunciar y demostrar la caracterización:

Teorema de caracterización de van Benthem: Sea $\alpha(x)$ una fórmula de primer orden en el lenguaje de correspondencia de la traducción estándar $\mathcal{L}$. Entonces $\alpha(x)$ es invariante bajo bisimulaciones sii es equivalente a la traducción estándar de una fórmula modal.

Este resultado nos dice cuál es *precisamente* el fragmento de primer orden que se corresponde con la lógica modal. La caracterización está dada en términos de bisimulaciones, es decir, a partir de *propiedades estructurales* de los modelos que ciertas fórmulas de primer orden distinguen.

Caracterización de van Benthem

Demostración: La dirección $\Leftarrow$) ya la probamos, cuando vimos que bisimilaridad implicaba equivalencia modal. Veamos la dirección $\Rightarrow$). Vamos a dar la demostración en 2 pasos:

1. Consideremos el conjunto de consecuencias modales de $\alpha(x)$

$$CM(\alpha) = \{ST_x(\varphi) \mid \varphi \text{ es una fórmula modal, y } \alpha(x) \models ST_x(\varphi)\}$$

- Afirmamos que si $CM(\alpha) \models \alpha(x)$, entonces $\alpha(x)$ es equivalente a la traducción de una fórmula modal. Asumamos entonces $CM(\alpha) \models \alpha(x)$.
- Por compacidad, existe un subconjunto finito $X \subseteq CM(\alpha)$ tal que $X \models \alpha(x)$. Por lo tanto, $\models \bigwedge X \rightarrow \alpha(x)$. Por otro lado, es trivial que $\models \alpha(x) \rightarrow \bigwedge X$, por lo que $\models \bigwedge X \leftrightarrow \alpha(x)$.
- Como cada $\beta \in X$ es la traducción de una fórmula modal, $\bigwedge X$ también lo es.

Caracterización de van Benthem

2. Por lo tanto, sólo nos queda mostrar que $CM(\alpha) \models \alpha(x)$. Asumamos $\mathcal{M}, g^x_w \models CM(\alpha)$ e intentemos mostrar $\mathcal{M}, g^x_w \models \alpha(x)$.
   - Sea $T(x) = \{ST_x(\varphi) \mid \mathcal{M}, g^x_w \models ST_x(\varphi)\}$
   - Afirmamos que $T(x) \cup \{\alpha(x)\}$ es consistente. Esto no es difícil de ver, razonando por el absurdo y usando compacidad para ver que si la inconsistencia es una consecuencia de $\alpha(x)$, entonces no puede valer la hipótesis de que $\mathcal{M}, g^x_w \models T(x)$.
   - Como $T(x) \cup \{\alpha(x)\}$ es consistente, entonces tiene un modelo que lo satisface. Sea $\mathcal{N}, v$ tal que $\mathcal{N}, g^x_v \models T(x) \cup \{\alpha(x)\}$

Caracterización de van Benthem

- Notemos que $\mathcal{M}, w$ y $\mathcal{N}, v$ son modalmente equivalentes:
  - $\mathcal{M}, w \models \varphi$ implica que $ST_x(\varphi) \in T(x)$. Esto significa que $\mathcal{N}, v \models \varphi$
  - $\mathcal{M}, w \not\models \varphi$ es lo mismo que decir $\mathcal{M}, w \models \neg\varphi$. Esto implica que $ST_x(\neg\varphi) \in T(x)$ y que $\mathcal{N}, v \models \neg\varphi$
- Si modalmente equivalente implicara bisimilar ya tendríamos lo que buscamos, porque si $\mathcal{N}, g^x_v \models \alpha(x)$ y $\mathcal{M}, w \underline{\leftrightarrow} \mathcal{N}, v$, como $\alpha(x)$ es invariante bajo bisimulaciones, $\mathcal{M}, g^x_w \models \alpha(x)$.

Caracterización de van Benthem

- Pero podemos aplicar el lema de Detour, y conseguir dos modelos bisimilares $\mathcal{M}^*, w^*$ y $\mathcal{N}^*, v^*$ que son extensiones elementales de los modelos originales.
- Por lo tanto, $\mathcal{N}, g_v^x \models \alpha(x)$ implica $\mathcal{N}^*, g_{v^*}^x \models \alpha(x)$. Como $\mathcal{M}^*, w^* \underline{\leftrightarrow} \mathcal{N}^*, v^*$ y $\alpha(x)$ es invariante bajo bisimulaciones, $\mathcal{M}^*, g_{w^*}^x \models \alpha(x)$.
- Y por lo tanto $\mathcal{M}, g_w^x \models \alpha(x)$.