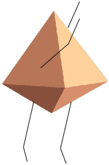
Lógica modal computacional

Completitud

Daniel Gorín & Sergio Mera

1er Cuatrimestre 2010



Bibliografía

- Capítulo 4 del Modal Logic Book, de Blackburn, Venema y de Rijke.

Introducción

- Al principio del curso habíamos visto que una lógica se puede especificar tanto semántica como sintácticamente.
- El enfoque semántico se corresponde con la noción de satisfacibilidad de una fórmula (o validez)
- El enfoque sintáctico se corresponde con la noción de teorema.
- A partir de esto, surgía la pregunta de cuándo estas dos alternativas estaban definiendo efectivamente la misma lógica.
- Más precisamente, nos interesa ver si el conjunto de fórmulas válidas es exactamente el mismo que el conjunto de teoremas.
- Para responder a esta pregunta, tenemos que probar la *correctitud* y *completitud* de nuestra lógica.

Introducción

Dado que vamos a trabajar con una variedad de lógicas modales, veamos con más precisión qué lógicas vamos a considerar.

- Una *lógica modal* Δ es un conjunto de fórmulas modales que contienen a todas las tautologías proposicionales y está cerrado por:
  I. *modus ponens*: Si $\varphi \in \Delta$ y $\varphi \to \psi \in \Delta$ entonces $\psi \in \Delta$.
  II. *sustitución uniforme*: Si $\varphi \in \Delta$ entonces también pertenece cualquier substitución, que consiste en reemplazar uniformemente cualquier proposición por una fórmula arbitraria.
- Si $\varphi \in \Delta$ decimos que φ es un *teorema* de Δ, y lo notamos como $\vdash_\Delta \varphi$.
- Si Δ_1 y Δ_2 son lógicas modales tales que $\Delta_1 \subseteq \Delta_2$ decimos que Δ_2 es una *extensión* de Δ_1

Algunos ejemplos

I) La colección de *todas las fórmulas* es una lógica. La lógica *inconsistente*.

II) Si $\{\Delta_i \mid i \in I\}$ es una colección de lógicas, entonces $\bigcap_{i\in I} \Delta_i$ es una lógica.

III) Si $\mathcal{M}$ es una clase de modelos, entonces el conjunto Δ_M de fórmulas válidas en $\mathcal{M}$ no necesariamente es una lógica. Pensar un contraejemplo!

Existe una lógica *mínima* que contiene a cualquier conjunto de fórmulas Γ. La llamamos la lógica *generada* por Γ.

- Por ejemplo, la lógica generada por el conjunto vacío contiene a todas las tautologías y nada más. Usualmente se la llama PC (de Propositional Calculus).

Repaso de definiciones

- Sean $\psi_1, \ldots, \psi_n, \varphi$ fórmulas modales. Decimos que φ es *deducible en el cálculo proposicional* asumiendo $\psi_1, \ldots, \psi_n$ si $(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \rightarrow \varphi$ es una tautología.

Como todas las lógicas están cerradas bajo deducción en el cálculo proposicional, si φ es deducible en el cálculo proposicional asumiendo $\psi_1, \ldots, \psi_n$, entonces $\vdash_\Delta \psi_1 \cdots \vdash_\Delta \psi_n$ implica $\vdash_\Delta \varphi$.

- Si $\Gamma \cup \{\varphi\}$ es un conjunto de fórmulas, entonces φ *es deducible en* Δ a partir de Γ si $\vdash_\Delta \varphi$ o hay fórmulas $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Gamma$ tal que

$$\vdash_\Delta (\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \rightarrow \varphi$$

Si ese es el caso, escribimos $\Gamma \vdash_\Delta \varphi$. Un conjunto de fórmulas Γ es Δ-consistente si $\Gamma \not\vdash_\Delta \perp$. Una fórmula φ es Δ-consistente si $\{\varphi\}$ lo es.

Lógica modal normal

- La idea anterior estaba generalizando conceptos del cálculo proposicional a los lenguajes modales
- Ahora vamos a ver un concepto que es exclusivamente modal: lógicas modales normales.
- Una lógica modal Δ es *normal* si contiene a la fórmula:

$$\textbf{(K)} \quad \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$$

y está cerrada por la regla de *generalización*

$$\textbf{(Nec)}\ \text{Si}\ \vdash_{\Delta} \varphi\ \text{entonces}\ \vdash_{\Delta} \Box\varphi$$

Ejemplos

I) La lógica inconsistente es una lógica normal

II) Si $\{\Delta_i \mid i \in I\}$ es una colección de lógicas normales, entonces $\bigcap_{i \in I} \Delta_i$ es una lógica normal.

III) PC no es una lógica normal.

Existe una lógica normal *mínima* que contiene a cualquier conjunto de fórmulas Γ. La llamamos la lógica *generada* por Γ.

- La lógica generada por el conjunto vacío es llamada **K**, y es la mínima lógica normal. Si Γ es no vacío, muchas veces se denota a la lógica normal generada por Γ como $\mathbf{K}\Gamma$.

También es usual llamar a Γ *axiomas*, y decir que la lógica es generada usando las *reglas de inferencia* modus ponens, sustitución uniforme y generalización.

Soundness & Completeness

Repasemos las definiciones:

- Una lógica Δ es *correcta* con respecto a una clase de modelos S si para toda fórmula φ y todo modelo $M \in S$, si $\vdash_\Delta \varphi$ entonces $M \models \varphi$.
- Una lógica Δ es *fuertemente completa* con respecto a una clase de modelos S si para cualquier conjunto de fórmulas $\Gamma \cup \{\varphi\}$, si $\Gamma \models_s \varphi$ entonces $\Gamma \vdash_\Delta \varphi$.

Soundness & Completeness

La noción de completitud se puede reformular en término de *consistencia*. Esto nos va a resultar muy útil luego.

- Si $\Gamma \models_s \varphi$ entonces $\Gamma \vdash_\Delta \varphi$
- Si $\Gamma \nvdash_\Delta \varphi$ entonces $\Gamma \not\models_s \varphi$
- Si $\Gamma \nvdash_\Delta \neg\varphi \rightarrow \bot$ entonces $\Gamma \not\models_s \varphi$
- Si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \nvdash_\Delta \bot$ entonces $\Gamma \not\models_s \varphi$
- Si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es Δ-consistente entonces $\Gamma \not\models_s \varphi$
- Si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es Δ-consistente entonces existe $\mathcal{M} \models_s \Gamma$ y $\mathcal{M} \models_s \neg\varphi$
- Si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es Δ-consistente entonces existe $\mathcal{M} \models_s \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$

Es decir:

- Una lógica modal normal Δ es *fuertemente completa* con respecto a una clase S sii cada conjunto Δ-consistente de fórmulas es satisfacible en algún modelo $M \in S$.

Modelo canónico

- Generalmente, demostrar correctitud con respecto a una clase S es fácil.
  - Hay que ver que los axiomas son universalmente válidos en S
  - Hay que ver que las reglas de inferencia preservan verdad en S
- Nos vamos a concentrar en demostrar completitud, y para eso tenemos que ver cómo hacer para encontrar un modelo que satisfaga a cada conjunto consistente de fórmulas.
- Y las "piezas" que vamos a usar van a ser *conjuntos maximales consistentes*.

Un conjunto de fórmulas Γ es maximal Δ-consistente si Γ es Δ-consistente y cualquier conjunto de fórmulas que contiene propiamente a Γ es Δ-inconsistente.

- Si Γ es un conjunto maximal Δ-consistente decimos que es un Δ-MCS.

Modelo canónico

¿Cuál es la intuición de usar MCSs en la prueba de completitud para lógicas modales?

- Observar que cada punto w en cada modelo M para una lógica Δ está asociado con un conjunto de fórmulas $\{\varphi \mid M, w \models \varphi\}$.
- No es difícil ver que este conjunto de fórmulas es efectivamente un Δ-MCS. Y esto significa que si φ es verdadera en un modelo para una lógica Δ, entonces φ pertenece a un Δ-MCS.
- Además, si w está relacionado con w' en algún modelo M, entonces la información de cada uno de los MCSs asociados a w y w' tienen que estar "coherentemente relacionada".

Modelo canónico

La idea es trabajar con colecciones de MCSs coherentemente relacionados para construir el modelo buscado. El objetivo es probar el *truth lemma*, que nos dice que 'φ pertenece a un MCS' es equivalente a 'φ es verdadera en un modelo'.

- Los mundos del modelo canónico van a ser todos los MCSs de la lógica en la que estemos trabajando.
- Vamos a ver qué significa que la información de los MCSs esté 'coherentemente relacionada', y vamos a usar esa noción para definir la relación de accesibilidad.

Propiedades de MCSs

Para llevar a cabo eso, veamos algunas propiedades que tienen los MCSs. Si Δ es una lógica y Γ es un Δ-MCS entonces:

- Γ está cerrado bajo modus ponens.
- $\Delta \subseteq \Gamma$.
- Para toda fórmula φ, $\varphi \in \Gamma$ ó $\neg\varphi \in \Gamma$.
- Para toda fórmula φ, ψ, $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ sii $\varphi \in \Gamma$ ó $\psi \in \Gamma$.

Lema de Lindenbaum

Como los MCSs van a ser las piezas que necesitamos para construir el modelo canónico, tenemos que asegurarnos de tener suficientes. Cualquier conjunto consistente de fórmulas puede ser extendido a uno maximal consistente.

- Si Σ es un conjunto Δ-consistente de fórmulas, entonces existe un Δ-MCS Σ^+ tal que $\Sigma \subseteq \Sigma^+$.

Demostración:

I) Enumeramos las fórmulas de nuestro lenguaje $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$.

II) Definimos la secuencia de conjuntos:

$$\begin{array}{lcl} \Sigma_0 & = & \Sigma \\ \Sigma_{n+1} & = & \begin{cases} \Sigma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{si el conjunto es } \Delta\text{-consistente} \\ \Sigma_n \cup \{\neg\varphi_n\} & \text{en otro caso} \end{cases} \\ \Sigma^+ & = & \bigcup_{n \geq 0} \Sigma_n \end{array}$$

Construcción del modelo canónico

El modelo canónico M^{Δ} para una lógica modal normal Δ (en el lenguaje básico) es $\langle W^{\Delta}, R^{\Delta}, v^{\Delta} \rangle$ donde:

- W^{Δ} es el conjunto de todos los Δ-MCSs
- R^{Δ} es la relación binaria sobre W^{Δ} definida por $R^{\Delta}wu$ si para toda fórmula ψ, $\psi \in u$ implica $\Diamond\psi \in w$.
- V^{Δ} es la valuación definida como $V^{\Delta}(p) = \{w \in W^{\Delta} \mid p \in w\}$

Algunos comentarios sobre el modelo canónico

- La valuación canónica iguala la verdad de un símbolo proposicional en w con su pertenencia a w. Nuestro objetivo es probar el *truth lemma* que lleva "verdad = pertenencia" al nivel de fórmulas.
- Los estados de M^Δ son *todos* los MCSs Δ-consistentes. La consecuencia de esto es que, dado el lema de Lindenbaum, *cualquier* conjunto Δ-consistente es un subconjunto de algún punto en M^Δ. Y por el truth lemma que vamos a probar después, cualquier conjunto Δ-consistente es verdadero en algún punto del modelo.

Algunos comentarios sobre el modelo canónico

- Esto significa que este *único* modelo M^{Δ} es un ‘modelo universal’ para la lógica Δ.
- Por último, la relación canónica de accesibilidad captura la idea que dos MCSs están ‘coherentemente relacionados’ en función de las fórmulas que valen en cada uno.

Completitud

Estamos en condiciones de probar el siguiente lema, que nos dice que hay 'suficientes' MCSs en nuestro modelo para lo que necesitamos hacer:

- **Existence lemma**: Para cualquier lógica modal normal Δ, y cualquier estado $w \in W^{\Delta}$, si $\Diamond\varphi \in w$ entonces existe un estado $v \in W^{\Delta}$ tal que $R^{\Delta}wv$ y $\varphi \in v$.

Demostración: Supongamos que $\Diamond\varphi \in w$. Vamos a construir v tal que $R^{\Delta}wv$ y $\varphi \in v$. Sea $v^{-} = \{\varphi\} \cup \{\psi \mid \Box\psi \in w\}$.

- v^{-} es consistente. Ejercicio! (y acá hay que hacer demostraciones sintácticas! :P)

Luego por Lindenbaum existe un Δ-MCS v que extiende a v^{-}. Por construcción, $\varphi \in v$, y para toda fórmula ψ, $\Box\psi \in w$ implica $\psi \in v$.

- Esto último implica que $R^{\Delta}wv$. Ejercicio!

Completitud

Ahora sí podemos llevar "verdad = pertenencia" al nivel de fórmulas arbitrarias.

- **Truth lemma**: Para cualquier lógica modal normal Δ y cualquier fórmula φ, $M^{\Delta}, w \models \varphi$ sii $\varphi \in w$.

La demostración sale fácil por inducción en φ. El único caso interesante es el modal, y eso está cubierto por el *existence lemma* (la dirección difícil).

Y finalmente:

- **Teorema del Modelo Canónico**: Cualquier lógica modal normal es fuertemente completa con respecto a su modelo canónico.

Demostración: Supongamos que Σ es un conjunto Δ-consistente. Por el lema de Lindenbaum existe un Δ-MCS Σ^{+} que extiende a Σ. Por el *truth lemma*, $M^{\Delta}, \Sigma^{+} \models \Sigma$.

Completitud

Como corolario tenemos:

- La lógica modal normal **K** es fuertemente completa con respecto a la clase de todos los modelos.

Por el teorema anterior, dado que **K** es una lógica modal normal, es fuertemente completa con respecto a su modelo M^K. Sólo queda chequear que M^K pertenece a la clase de todos los modelos, pero esto es trivial.